UNIVERSITY OF TORONTO
3 1761 01018542 9

Digitized by the Internet Archive
in 2018 with funding from
University of Toronto

https://archive.org/details/diepolydimension00sche

DIE

POLYDIMENSIONALEN GRÖSSEN

UND DIE

VOLLKOMMENEN PRIMZAHLEN.

VON

DR. HERMANN SCHEFFLER,

Mitglied der Kaiserlichen Sozietät der Naturforscher zu Moskau, Korrespondirendem Mitglied der Königlichen Akademie der Wissenschaften zu Padua.

MIT 42 IN DEN TEXT EINGEDRUCKTEN FIGUREN.

BRAUNSCHWEIG,

DRUCK UND VERLAG VON FRIEDRICH VIEWEG UND SOHN.

1880.

Alle Rechte vorbehalten.

DIE

POLYDIMENSIONALEN GRÖSSEN

UND DIE

VOLLKOMMENEN PRIMZAHLEN.

Holzstiche
aus dem xylographischen Atelier
von Friedrich Vieweg und Sohn
in Braunschweig

Papier
aus der mechanischen Papier-Fabrik
der Gebrüder Vieweg zu Wendhausen
bei Braunschweig.

QA
246
S3

LIBRARY
NOV 29 1972
UNIVERSITY OF TORONTO

INHALT.

		Seite
§. 1.	Einleitung	1
§. 2.	Neuere Versuche, die räumlichen Anschauungen auf arithmetische Begriffe zu bringen	9
§. 3.	Primäre, sekundäre und tertiäre Addition	32
§. 4.	Primäre, sekundäre und tertiäre Multiplikation	47
§. 5.	Vieldeutigkeit	58
§. 6.	Das Raumpolygon	66
§. 7.	Die ganzen, die gebrochenen und die irrationalen Zahlen	70
§. 8.	Die Primzahlen	78
§. 9.	Die Zerlegung der gemeinen reellen Primzahlen	90
§. 10.	Weitere Anwendungen des Situationskalkuls	98
§. 11.	Flächengrössen	113
§. 12.	Körper und vierdimensionale Grössen	117
§. 13.	Die Vieldeutigkeit der anschaulichen Grössen	137
§. 14.	Der körperliche Vektor und der Abschluss des vierdimensionalen Raumes	139
§. 15.	Die vierdimensionale Grösse als Ort eines variabelen Punktes	159
§. 16.	Körperliche Richtung	175
§. 17.	Drehung, Wälzung und Wendung in den verschiedenen Dimensitätsgebieten	183
§. 18.	Körperliche Form und Krümmung	189
§. 19.	Die Transformation der Körper	196
§. 20.	Irrige Ansichten über den vierdimensionalen Raum	198

§. 1.

Einleitung.

Es ist schon lange bekannt, dass die reellen Primzahlen von der Form $4n + 1$ keine vollkommenen Primzahlen, sondern in zwei komplexe ganze Faktoren zerlegbar sind: die reellen Primzahlen von der Form $4n + 3$ gelten jedoch noch immer für vollkommen. Die Widerlegung dieses Irrthums und die Aussonderung der wahren Primzahlen ist der nächste Zweck dieser Abhandlung.

Die Entdeckung der Zerlegbarkeit gewisser bis dahin für Primzahlen gehaltenen Zahlen fällt mit der Erkenntniss der Bedeutung der imaginären, der komplexen und der überkomplexen Zahlen zusammen. Ein fernerer Zweck dieser Abhandlung besteht daher in der Läuterung der hierher gehörigen Begriffe, vornehmlich aber in der Erweiterung des überkomplexen Grössengebietes und der ihm angehörigen Operationen, ein Zweck, dessen Interesse durch das Bedürfniss der Aufklärung der Gesetze des vierdimensionalen Raumes und, allgemein, des polydimensionalen Grössengebietes wesentlich erhöht wird, besonders nachdem in heutiger Zeit der Spiritismus sich erlaubt, durch Trugbilder die Phantasie der Gutgläubigen zu verwirren.

Dass sich das Erkenntnissgebiet der Menschen nur allmählich erweitert, ist leicht begreiflich; räthselhaft aber ist der Erweiterungsprozess an sich, und es verlohnt sich wohl der Mühe, an dem vorliegenden Falle das wunderbare Walten des Verstandes zu beleuchten, wie er in einem vollkommen dunkelen Gebiete des Wissens keineswegs ein blindes Glücksspiel mit zufälligen Entdeckungen spielt, sondern, von unsichtbarer Geistesmacht getrieben, nach Prinzipien arbeitet, noch ehe ihm dieselben zum Bewusstsein gedrungen sind.

Die Arithmetik, worunter ich alle Zweige der Grössenlehre (Algebra, Analysis, Zahlentheorie, Differential-und Integralrechnung u. s. w.) verstehe, hat den Zweck, die anschaulichen Gesetze der Welt, d. h. die Gesetze des Raumes, der Zeit, der Materie, des Stoffes und des Formwesens in

Begriffen zu denken. Sie hat keinen anderen Zweck, als eben diesen. In der Erfüllung ihrer Aufgabe kann die Mathematik keine Gesetze und Prinzipien, keine Eigenschaften und Prozesse machen oder schaffen, sondern nur bestehende Gesetze erkennen und aufdecken. Die Gesetze der anschaulichen Welt sind aber zugleich die Gesetze des menschlichen Anschauungsvermögens; darum ist die Ergründung der anschaulichen Weltgesetze mit der Ergründung des menschlichen Anschauungsvermögens identisch; darum entspricht das rationell Gedachte dem wirklichen Sein und, umgekehrt, erscheint das wirkliche Sein als etwas Verständliches, Intelligibeles und Wahres. Hiernach ist es begreiflich, wie die Beobachtung der Aussenwelt und die innere Spekulation sich ergänzen und zum Aufbau der Wissenschaft beitragen. Die ungeregelte, unkontrolirte Spekulation kann allerdings Absurditäten für Wahrheiten ausgeben; ebenso kann aber auch die missverstandene Beobachtung Irrthümer erzeugen: in der Fehlbarkeit sind beide Wege gleich, aber auch in der Gewissheit der richtigen Erkenntniss. Wie wir mit normalen Augen bei normalem Gebrauche normal sehen, so denken wir auch mit normalem Verstande bei normalem Gebrauche normal.

Die Geometrie kann daher keine anderen Figuren und Prozesse schaffen, als im Raume möglich sind; räumliche Ausdehnung, Ort, Richtung, Dimensität, Form, räumliche Erweiterung, Fortschritt, Drehung, Dimensionirung und Krümmung sind keine willkürlich gemachten, sondern wirkliche Grundeigenschaften und Grundprozesse des Raumes. Ganz ebenso kann die Arithmetik keine Grössen und Operationen erfinden, welche nicht die verstandesmässigen Repräsentanten wirklicher Grössen und Prozesse wären; alle entgegengesetzten Ansichten, dass man mit beliebigen Definitionen Grundlagen zu Gesetzen schaffen könne, beruhen auf Selbsttäuschung, und das auf solchen Hypothesen mit logischen Schlussfolgerungen errichtete Gebäude ist ein Kartenhaus, ein wesenloses Blendwerk der Phantasie, welches fällt und zerrinnt, sobald ihm die künstlichen Stützen entzogen werden. Das Schöpferische in der Mathematik besteht nicht in der Erdichtung von Grundlagen oder Prinzipien, sondern in der Kombination der unter gegebenen Prinzipien möglichen konkreten Fälle. Hinsichtlich der Prinzipien hat die Mathematik lediglich die Aufgabe, die in der Welt und im menschlichen Geiste liegenden Grundgesetze zu befolgen.

Es ist nun höchst merkwürdig, dass die Mathematik seit Jahrtausenden ihre Aufgabe ausschliesslich in der systematischen Ausbildung der Kombinationen gesucht und darin Erstaunliches geleistet hat, dass sie hierbei auch stets nach Prinzipien verfahren ist, ohne sich doch jemals die Frage nach diesen Prinzipien vorzulegen oder sich dieser Prinzipien bewusst zu werden, also auch, ohne eine Ahnung von dem Grade der Vollständigkeit des unbewusst befolgten Systems von Prinzipien zu haben.

Auf den ersten Blick möchte man sich wundern, dass ein solches Vorgehen nicht zahlreiche Irrthümer herbeigeführt hat: dass Dies nicht geschehen, hat bei der Mathematik seinen guten Grund. Da nämlich die anschauliche Aussenwelt (der Raum, die Zeit, die Materie u. s. w.) exakten oder strengen Gesetzen unterworfen ist, welche keine Abweichungen gestatten; so deckt die unmittelbare Anwendung der mathematischen Rechnung auf die anschauliche Aussenwelt, deren geistiger Vertreter der mathematische Gedanke ist, sofort die etwaige Unrichtigkeit eines angenommenen oder unbewusst befolgten falschen Grundgesetzes durch den sich ergebenden Widerspruch auf. Falsche Grundgesetze würden sich also in der Mathematik bald überleben. So niedrig das Niveau dieser Wissenschaft zu irgend einer Zeit gewesen sein mag, eigentlich falsche Sätze kann sie darum niemals in grosser Zahl enthalten haben. Die Mangelhaftigkeit der Prinzipien kann in der Mathematik wesentlich nur als eine Unzulänglichkeit, als ein Hinderniss des Fortschrittes, als eine Verdunkelung gewirkt haben.

Die übrigen Wissenschaften sind zwar nicht anders vorgegangen, als die Mathematik; allein, theils die grössere Freiheit der in ihren Gebieten herrschenden Gesetze, theils die grössere Unvollständigkeit und Schwierigkeit der Beobachtung auf diesen Gebieten gestattet keine so scharfe Kontrole der wissenschaftlichen Resultate durch die Thatsachen, verdeckt also zahlreichere Irrthümer und lässt grössere Willkürlichkeiten zu, als in der Mathematik, verleiht mithin allen übrigen Wissenschaften das Gepräge grösserer Unvollkommenheit. Die Mathematik verdankt daher ihr höheres Ansehen als reine Wissenschaft weit mehr dem Gegenstande, als der Methode, deren Ausbildung zu allen Zeiten der nach Entdeckung des Neuen strebenden Phantasie überlassen war. Es ist ein besonderer Zweck dieser Schrift zu zeigen, wie ein guter Genius die schaffende Phantasie trotz mangelnder Erkenntniss der Prinzipien nach manchen Irrungen und Tastversuchen endlich auf den rechten Weg führt.

Wie der Mensch in artikulirten Lauten mit instinktmässiger Befolgung grammatischer Prinzipien zu sprechen und in tiefster geistiger Ungebildetheit eine regelrecht konstruirte Sprache aufzubauen begann, so fing er auch an zu zählen oder zu numeriren, sodann aneinander zu reihen oder zu addiren, darauf zu vervielfältigen oder zu multipliziren: es hat lange gedauert, ehe der Begriff der Potenz auftauchte. Warum musste er nun vorher numeriren, dann addiren und hierauf multipliziren? Konnte er statt Dessen nicht andere Operationen vornehmen? — manche Analytiker glauben ja noch heute, kraft einer beliebigen Definition täglich neue Operationen erfinden zu können — oder konnte er nicht wenigstens den Luxus der Operationen beschränken? viele Mathematiker glauben ja noch heute, dass sich Multiplikation auf Addition und Addition auf Numeration zurückführen lasse. Wir sind der letzteren Ansicht durchaus nicht, erkennen vielmehr in den Grundeigenschaften und Grundoperatio-

nen ganz bestimmte, selbstständige, eigenartige Grundlagen der Gesetze der Welt und demzufolge auch des Geistes, da dieser ein Bestandtheil der Welt ist, also den Weltgesetzen untersteht. Unser Buch über die „Naturgesetze“ ist der Ausführung dieser Ansicht und der Entwicklung der Grundgesetze und Grundprinzipien gewidmet; im dritten Theile, welcher die logischen Gesetze behandelt, und zwar in §. 497, haben wir bei der ausführlichen Darlegung des Kardinalprinzipes den Irrthum hinsichtlich der Zurückführbarkeit der einen Grundoperation auf die andere ausdrücklich widerlegt. Hieraus geht hervor, dass der Beginn der menschlichen Rechenarbeit mit der Numeration, sodann der Fortgang zur Addition und hierauf der Eintritt in die Multiplikation ein ebenso natürlicher und nothwendiger Entwicklungsgang ist, wie die Reihenfolge von Prozessen, welche ein Samenkorn durchläuft, um sich zum Baume zu entfalten.

Aber mehr als Das; nachdem einmal mit der Zählung, als der absolut einfachsten Operation begonnen war, gab es keine Wahl mehr für den Fortschritt: es musste darauf mit Nothwendigkeit die Addition und hierauf die Multiplikation folgen. Ein Sprung über die eine oder andere hinweg war unmöglich, weil sonst das neue Gebilde mit den alten nicht zusammenwachsen konnte, also durch das alte nicht zu verstehen war. Wohl aber war es möglich, eine folgende Operation zu üben, ohne sich dessen bewusst zu sein und ohne dieselbe zu benennen; hat doch das Menschengeschlecht in seiner Kindheit die Regeln der Grammatik, die Gebote des Rechtes, der Liebe, der Moral, der Schönheit u. s. w. geübt, ohne es zu wissen. So konnte man faktisch Potenzirungsakte vornehmen, während sich das darin liegende Neue in der Umschreibung verhüllte: man konnte auch die Gebiete der Numeration, der Addition und der Multiplikation seitwärts unter der Herrschaft von Grundprinzipien erweitern, ohne von dieser Herrschaft eine Ahnung zu haben. So ist es auch geschehen: das Merkwürdigste dabei aber liegt darin, dass es unausweichlich geschehen musste, dass überhaupt der Fortschritt in der Mathematik so gut wie in jeder anderen Wissenschaft, Kunst, Beschäftigung unvermeidlich ist, dass er sich mit unwiderstehlicher Gewalt aufdrängt, dass er den Menschen wider sein Wissen und Wollen zum Höheren fortreisst, ebenso wie der Baum nicht bloss faktisch und zufällig, sondern nothwendig wächst, sich entwickelt, Blüthen und Früchte treibt, vorausgesetzt nur, dass erhebliche Schädlichkeiten oder Feinde der Entwicklung, hemmende und störende Einflüsse von ihm abgehalten werden. Es bedarf zum Fortschritte nur eines gesunden Keims, einer freien Bewegung, eines tragfähigen Bodens, einer normalen Umgebung und, sofern diese Bedingungen nicht garantirt sind, einer Vormundschaft, einer Führung und eines Schutzes bis zu demjenigen Grade, dass eben die natürlichen Kräfte ihre natürliche Thätigkeit vollbringen können. Im Menschengeiste selbst liegt nicht bloss der Drang nach Vervollkommnung, sondern auch, und das ist etwas sehr Wesentliches, die Stufenleiter, deren

Besteigung ihn unfehlbar höher trägt, wenn er sonst nur seine Kräfte zum Steigen gebraucht.

Diese Stufenleiter ist das Kardinalprinzip, welches ein in sich geschlossenes System von übereinander und nebeneinander geordneten Grundeigenschaften ist, die dergestalt zusammenhängen, dass Entwicklung nach oben und Ausbreitung nach der Seite sich grundsätzlich bedingen, ein System, das, nachdem es einmal durchlaufen ist, wie ein organisches Gebilde immer weitere Denkstoffe nach demselben Prinzipe in seine Kreise zieht, sich also stets erneuert und in der Erneuerung erweitert, ein Prinzip, welches für alle Grössengebiete, für alle Geistesvermögen, für alle Wissenschaften einunddasselbe ist und welches daher auch die Wissenschaften unter sich verbindet und zu einem einzigen Wissensganzen vereinigt.

Nachdem der Mensch einmal die erste Grundeigenschaft, die Vielheit, gedacht hatte, ergab sich als erster Veränderungsprozess leicht die Vereinigung oder, als Grundoperation, die Zählung oder Numeration und zwar zunächst in ihrer primitiven Bedeutung, als Zusammenzählung. Der Zählungsprozess musste bald eine neue Vorstellung herbeiführen: die Aufeinanderfolge des Grösseren auf das Kleinere, also die Vorstellung der zweiten Grundeigenschaft, nämlich der Reihe, nebst der zugehörigen Grundoperation, nämlich des Überganges von einem Anfange zu einem Ende, d. h. des Fortschrittes oder der Anreihung oder Addition. Der Fortschritt aber bedingte sehr natürlich den Rückschritt, die Addition führte zur Subtraktion, und damit war zugleich das zweite Grundprinzip, nämlich das der Kontrarietät oder des Gegensatzes betreten, während sich der Grundprozess der Vereinigung nur erst auf dem Gebiete des ersten Grundprinzipes, dem der Primitivität oder Ursprünglichkeit oder Absolutheit bewegt hatte.

Schon auf diesem noch sehr niedrigen Stadium der mathematischen Erkenntniss haben sich dem Denker unfehlbar Grössen aufgedrängt, welche ihm unverständlich waren, da er das Operationsfeld nicht mit dem Bewusstsein der Grundgesetze betreten hatte. Diess waren die negativen Zahlen, zu welchen die fortgesetzte Subtraktion nothwendig führen musste. Man wird in jener Zeit natürlich die Subtraktion von dem Nullwerthe als eine Absurdität zurückgewiesen und sich über das Wesen der negativen Zahlen keine Sorgen gemacht haben: heute macht man sich ebenfalls keine Sorgen darüber; aber man hält dieselben durchaus nicht für Absurditäten, sondern für die mit den positiven Zahlen völlig gleichberechtigten Glieder der Zahlenreihe, indem man diese zweiseitige Reihe zum Unterschiede von der einseitigen Reihe der absoluten Vielheiten die reelle Zahlenreihe nennt.

Wiederholte Addition leitete unvermerkt zur Vervielfältigung oder zur Multiplikation; diese aber involvirte den neuen Begriff des Verhältnisses zwischen Multiplikand und Produkt. Hiermit war man auf einem Punkte angelangt, von wo aus ein tieferer Einblick in das Wesen der

Dinge möglich gewesen wäre: allein, es hat Jahrtausende bedurft, um den Schleier zu lüften. Der dritte Grundprozess stiftet nicht bloss zwischen positiven, sondern, generell, zwischen allen Zahlen, also auch zwischen positiven und negativen Zahlen ein Verhältniss. Die letzteren bilden zwei Gegensätze oder Kontrarietätsstufen des Fortschrittsgesetzes: das Kardinalprinzip lehrt aber, dass zwei Kontrarietätsstufen des Fortschrittes durch einen Akt des Verhältnissprozesses verbunden und durch eine Neutralitätsstufe der Verhältnissgrössen vermittelt werden oder dass der Übergang von der einen zu der anderen Kontrarietätsstufe durch das Neutralitätsgebiet führt, welches dreistufig ist. Man musste daher nothwendig einmal die Entdeckung machen, dass die Zahl $\sqrt{-1}$, welche die mittlere geometrische Proportionale zwischen $+1$ und -1 ist, eine neutrale Zahl ist oder einer Neutralitätsreihe angehört, welche das Reelle weder vermehrt, noch vermindert, welche aber dessenungeachtet eine Vielheit ist, eine Vielheit von neutralen Dingen. Richtige Grundoperationen hatten richtige und dem allgemeinen Grössensysteme angehörige Grössen geschaffen; man verstand sie nicht, man verstand seine eigenen Schöpfungen nicht, weil man eben nicht an Grundprinzipien dachte, sondern bei aller Kunst und Gewandtheit doch handwerksmässig rechnete: demzufolge gab man jenen Zahlen den Titel der imaginären Zahlen, welcher von dem der Absurditäten nicht weit ab lag. Erst in neuer Zeit ist die Bedeutung dieser Zahlen als Repräsentanten derjenigen räumlichen Grössen erkannt, welche auf den in reeller Richtung liegenden normal stehen.

Die jetzt lebenden Mathematiker wissen recht gut, mit welchen Zweifeln diese Deutung, die auch unser Gauss mit Entschiedenheit vertreten hat, aufgenommen, wie sie bekämpft, wie sie als ein Rapprochement ohne tieferen Sinn aufgefasst und bis jetzt ziemlich fruchtlos geblieben, ja, wie ich zeigen werde, der Quell zahlreicher Irrthümer geworden ist, obgleich sie einen Keim von hoher Fruchtbarkeit und Wahrheit in sich birgt. Diese Erscheinung lässt sich nur daraus erklären, dass die Mathematik bis zu diesem Augenblicke ihre ganze Kraft darauf verwandt hat, konkretes Material an Formeln und Konstruktionen zu erzeugen, ohne den Prinzipien, Grundgesetzen, Grundsätzen und den übrigen philosophischen Grundlagen des mathematischen Denkens ein Studium zuzuwenden. Bei dieser Gewöhnung herrscht wenig Geschmack und Verständniss für eigentliche Prinzipien.

Als ich um das Jahr 1844 von Gauss's Idee über die imaginären Zahlen (welche im Jahre 1831, also fast vor einem halben Jahrhundert vor dem heutigen Tage, in den Göttinger Gelehrten Anzeigen niedergelegt, jedoch schon früher aufgetaucht und auch von anderen Mathematikern ausgesprochen ist) Kunde bekam, war ich naiv genug zu glauben, dass ein Jeder von der Tragweite dieses Gedankens mächtig bewegt werden und den Ausbau desselben freudig begrüssen müsse, da jener Ge-

danke an sich ja fürerst nur einen Funken bildete, dem reichlicher Brennstoff zuzutragen war, um eine leuchtende und wärmende Flamme daraus zu entfachen, nämlich eine Flamme, welche fähig wäre, von jenem Brennpunkte aus das ganze Gebiet der mathematischen Prinzipien zu bestrahlen. In der Schrift „Über das Verhältniss der Arithmetik zur Geometrie“ vom Jahre 1846 und sodann in dem „Situationskalkul“ vom Jahre 1851 meinte ich eine, wenn auch nicht vollendete, doch in der Hauptsache zutreffende Grundlage für das System der mathematischen Grundgesetze geschaffen zu haben. Es ist auch möglich, dass Diess wirklich geschehen ist; Früchte, ausser in meiner eigenen Erkenntniss, haben indessen jene Bücher nicht getragen; es hat sich wenigstens Niemand gefunden, der auf jenen Grundlagen weiter gebaut hätte. Dagegen sind von verschiedenen Seiten unter Nichtberücksichtigung dieser Schriften Versuche gemacht, auf dem Gebiete der imaginären Zahlen in anderer Weise vorzudringen.

Kein einziger dieser Versuche hat übrigens den Zweck, die allgemeinen Prinzipien und Grundgesetze zu erforschen, sondern alle fassen das Gebiet des Imaginären wie eine neu entdeckte Insel auf und bezwecken, die Eigenthümlichkeit dieser Insel zu ergründen und deren eigenartige Produkte für den mathematischen Formelapparat nutzbar zu machen. Gewandte Rechner haben auf diese Weise manchen schönen Fund gemacht; die Prinzipien der Mathematik sind hierdurch aber nicht weiter aufgeklärt; eher sind sie verdunkelt.

Während nämlich die reellen Zahlen die Repräsentanten aller räumlichen Grössen sind, die in einer unendlichen geraden Linie Platz finden, sind die komplexen Zahlen die Vertreter aller räumlichen Grössen, welche in einer Ebene vorkommen. Über die in einer Ebene möglichen Gebilde hinaus reicht die Wirkung des Imaginären nicht. Aus unseren Grundgesetzen geht deutlich hervor, dass Diess absolut unmöglich ist; die allgemeinere Zahlform, welche die Analogie zu Linien im Raume ist, liegt noch nicht in der komplexen Form. Der Grund hiervon ist leicht zu begreifen: während die Variation des reellen Faktors a eine verhältnissmässige Vergrösserung, also, wenn von Linien die Rede ist, eine Bewegung in der Grundaxe anzeigt, entspricht der neutrale Faktor oder der Richtungskoeffizient $(-1)^n$, welchen man auch in der Form $e^{n\pi\sqrt{-1}}$ und auch in der Form $\cos n\pi + \sin n\pi . \sqrt{-1}$ darstellen kann, einer Drehung der positiven Richtung $+1$ nach der negativen Richtung -1 hinüber um den Nullpunkt in der diese beiden entgegengesetzten Richtungen verbindenden Grundebene um den Winkel $n\pi$. Welchen Gesetzen man nun auch die Grösse n unterwerfen möge, an der Bewegung in der Grundebene wird hierdurch nicht das mindeste geändert. Es ist eben das Zeichen *minus*, welches, wenn es zur Wurzel einer Potenz genommen wird, die Drehung in der Grundebene prinzipiell bedingt. Allerdings kann man jede beliebige durch die Grundaxe des Raumes gehende Ebene

zur Grundebene annehmen, wie man ja auch jede Richtung im Raume zur Grundaxe, jede Seite dieser Axe zur positiven Seite, jede Länge zur Einheit annehmen kann: allein, nachdem Diess geschehen, geht jede durch $(-1)^n = e^{n\pi\sqrt{-1}}$ angezeigte Drehung durch jene Grundebene, und eine Richtung, welche nicht in dieser Ebene liegt, ist durch einen solchen Richtungskoeffizienten nicht darstellbar; es ist ein entschiedener Irrthum zu glauben, dass der Winkel $n\pi$ bald einmal in dieser, bald einmal in jener Ebene gemessen werden dürfe. Mit demselben Rechte würde man ja auch eine reelle Linie bald einmal in der Grundaxe, bald einmal in der imaginären Axe, bald einmal in einer anderen Richtung messen können, und der Richtungskoeffizient verlöre jede Bestimmtheit.

Dieser Irrthum herrscht aber noch heute und scheint durch die Autorität von Gauss, welcher ihn theilte, befestigt zu sein, indem er, wie Hankel in seinen Vorlesungen über die komplexen Zahlen, §. 29, berichtet, einen Beweis des Satzes, „dass die Relationen zwischen Dingen, die eine Mannichfaltigkeit von mehr als zwei Dimensionen darbieten, nicht noch andere in der allgemeinen Arithmethik zulässige Arten von Grössen liefern können," zu geben versprochen, jedoch nicht gegeben hat, weil der Satz in der That unrichtig ist.

Man glaubt, durch Zulassung aller möglichen Wurzeln der Einheit, also mit Hülfe der Werthe von r, welche der Gleichung $r^p = 1$ genügen und welche in dem oben erwähnten Richtungskoeffizienten $(-1)^n$ enthalten sind, zu den allgemeinsten Zahlformen in der Gestalt

$$a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + \cdots + a_{p-1} r^{p-1}$$

gelangt zu sein, hat hiermit aber keineswegs das Gebiet der Zahlenebene verlassen: denn, da sich jeder Werth von r und jede Potenz von r in die Form $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ bringen lässt; so hat auch jede Zahl der vorstehenden Art den gemeinen komplexen Werth $A + B\sqrt{-1}$.

Dass in dieser Zahlenebene manche schönen Gesetze zu entdecken sind, ist selbstverständlich. Namentlich hat Kummer die Wissenschaft in diesem Gebiete durch die idealen komplexen Primfaktoren bereichert. Mein Gesichtspunkt ist jetzt jedoch nicht der Ausbau der durch die komplexe Zahl aufgeschlossenen Zahlenebene, sondern das System der Prinzipien und Grundgesetze, und dieses kann durch Operationen, welche sich auf einer ganz bestimmten Stufe jenes Systems bewegen, unmöglich erweitert werden, so genial diese Operationen und so nothwendig und nützlich sie in anderer Hinsicht sein mögen.

Verschiedene Versuche mit willkürlich gebildeten Funktionen, z. B. der ältere Versuch von Argand mit der imaginären Potenz des Imaginären in der Form $(\sqrt{-1})^{\sqrt{-1}}$ missglückten natürlich ebenso sehr, da es ein für alle Mal unmöglich ist, sich an dem eigenen Schopfe aus dem Sumpfe zu ziehen: mag man sich mit dem Minuszeichen noch so

sehr krämmen und winden; es führt nimmermehr aus der Zahlenebene hinaus, da es prinzipiell das Verbleiben in dieser Ebene bedeutet.

§. 2.

Neuere Versuche, die räumlichen Anschauungen auf arithmetische Begriffe zu bringen.

Ein neuerer Versuch von den räumlichen Anschauungen reine arithmetische Begriffe zu abstrahiren, hat sich durch die Ausführlichkeit seiner Entwicklung ein gewisses Ansehen erworben; es ist die Theorie der Quaternionen von Hamilton aus dem Jahre 1853. Der Verfasser postulirt unter den Symbolen i, j, k, wofür Hankel in §. 42 seiner Vorlesungen über die komplexen Zahlen vom Jahre 1867 die auch nachstehend gebrauchten Zeichen ι_1, ι_2, ι_3 setzt, drei imaginäre Einheiten, aus welchen er die Quaternion

$$\xi = x_0 + x_1 \iota_1 + x_2 \iota_2 + x_3 \iota_3$$

bildet, in der x_0, x_1, x_2, x_3 reelle oder gemeine komplexe Grössen sein sollen. Eine aus Grundprinzipien verstehbare Definition wird von jenen Symbolen nicht gegeben; vielmehr werden dieselben an willkürlich aufgestellte Bedingungen geknüpft, nämlich an die vier Relationen

$$\iota_1 \iota_1 = -1 \qquad \iota_2 \iota_2 = -1 \qquad \iota_3 \iota_3 = -1 \qquad \iota_1 \iota_2 = \iota_3$$

aus welchen dann die Gruppe (1) auf S. 142 von Hankel's Schrift abgeleitet ist. Aus dieser Gruppe notiren wir noch die Relationen

$$\iota_2 \iota_1 = -\iota_3 \quad \text{und} \quad \iota_1 \iota_2 \iota_3 = +1$$

Ich habe wiederholt und insbesondere in §. 539 der „Naturgesetze“ darauf aufmerksam gemacht, dass es weder dem Mathematiker, noch dem Logiker frei steht, beliebige Grundeigenschaften, Grundgesetze und Grundoperationen zu erfinden oder willkürliche Definitionen und Bedingungen aufzustellen. Kein Schatten erlangt dadurch Wesen, dass man ihn dafür ausgiebt und wie ein wirkliches Wesen behandelt. Wenn generell $\iota_1 \iota_1 = -1$ sein soll, kann ι_1 nur den Werth $\sqrt{-1}$ haben. Ebenso ist dann $\iota_2 = \sqrt{-1}$ und $\iota_3 = \sqrt{-1}$ und es ist überhaupt $\iota_1 = \iota_2 = \iota_3 = \sqrt{-1}$. Die drei fiktiven imaginären Einheiten $\iota_1, \iota_2, \iota_3$ sind also einander und der gemeinen imaginären Einheit $\sqrt{-1}$ gleich, sie bestehen mithin gar nicht; ihre Verschiedenheit ist eine Illusion gleichwie die vierte Bedingung $\iota_1 \iota_2 = \iota_3$.

Abgesehen von der Undefinirbarkeit der sogenannten höheren komplexen Einheiten ι_1, ι_2, ι_3 muss ich die für dieselben aufgestellten Grund-

bedingungen für falsch erklären. Nimmt man die ersten vier Relationen an; so bedingt die vierte $\iota_1 \iota_2 = \iota_3$, wenn man dieselbe beiderseits mit ι_3 multiplizirt, nothwendig die Relation $\iota_1 \iota_2 \iota_3 = \iota_3 \iota_3$. Da nun $\iota_3 \iota_3$ nach der dritten Relation $= -1$ ist; so kann unmöglich $\iota_1 \iota_2 \iota_3 = +1$ gesetzt werden, wie es in der Gruppe (1) geschieht. Ich behaupte aber ferner, dass die vierte Relation $\iota_1 \iota_2 = \iota_3$ mit den ersten dreien unverträglich ist. Die Figur 20 in Hankel's Schrift veranschaulicht Hamilton's Grundgedanken. Wenn x eine beliebige Richtung im Raume ist, soll $x\iota_1$ eine auf x normal stehende Richtung, also die Multiplikation mit ι_1 eine Drehung von 90 Grad in einer durch x gehenden Ebene oder um eine auf dieser Ebene normal stehende Axe, ferner die Multiplikation mit ι_2 eine Drehung von 90 Grad um eine zweite auf der ersten normal stehende Axe, endlich die Multiplikation mit ι_3 eine Drehung von 90 Grad um eine dritte normale Axe darstellen. Diese Symbolik zugelassen, kann man die ersten drei Relationen $\iota_1 \iota_1 = \iota_2 \iota_2 = \iota_3 \iota_3 = -1$ akzeptiren, wenn man darunter versteht, dass eine Wiederholung derselben Drehung ι von 90 Grad eine Drehung von 180 Grad, also eine der ursprünglichen direkt entgegengesetzte Richtung erzeugt.

An diese Relationen müssen unbedingt die Relationen angeschlossen werden, welche aussagen, dass drei aufeinander folgende direkte Drehungen von 90 Grad um die drei Grundaxen in die ursprüngliche Richtung zurückführen. Diess giebt die Relationen

$$\iota_1 \iota_2 \iota_3 = \iota_2 \iota_3 \iota_1 = \iota_3 \iota_1 \iota_2 = +1$$

welche sich auch in der Gruppe (1) vorfinden.

Mit diesen Relationen aber ist die Relation $\iota_1 \iota_2 = \iota_3$ unverträglich. Schon die geometrische Anschauung lehrt, dass die Drehung ι_2, welche auf die Drehung ι_1 folgt, die positive Richtung der dritten Axe erzeugt. In diese Richtung bringt man aber die ursprüngliche Linie x nicht durch die direkte dritte Drehung ι_3, sondern durch die entgegengesetzte dritte Drehung $-\iota_3$; man hat also entschieden

$$\iota_1 \iota_2 = -\iota_3, \text{ nicht } = +\iota_3$$

Auch die rationelle Rechnung bestätigt dieses Resultat: denn wäre $\iota_1 \iota_2 = \iota_3$; so folgt aus einer beiderseitigen Multiplikation mit ι_3 unfehlbar $\iota_1 \iota_2 \iota_3 = \iota_3 \iota_3 = -1$, während doch $\iota_1 \iota_2 \iota_3 = +1$ sein muss.

Wenn die ursprüngliche Linie x erst die Drehung ι_2, also eine Viertelumwälzung um sich selbst macht, wodurch sie die zweite Grundaxe nothwendig mit sich führen muss (weil sonst eine folgende Drehung ι_1 das unstatthafte Resultat $\iota_2 \iota_1 = \iota_2$ geben würde); so gelangt sie durch eine darauf folgende Drehung ι_1 in die Richtung der dritten Axe, also in diejenige Richtung, in welche sie auch durch eine erste Drehung $-\iota_3$ gelangen würde. Man hat daher $\iota_2 \iota_1 = -\iota_3$. Diese Relation findet sich zwar unter der Gruppe (1); sie lehrt aber durch Vergleichung mit der vorhergehenden, dass $\iota_2 \iota_1$ denselben Werth wie $\iota_1 \iota_2$, nicht den entgegengesetzten hat.

Das letzte Resultat ist von grosser Bedeutung für den Quaternionenkalkul und berichtigt sofort die widersinnigen Sätze des §. 45. Diese Sätze sprechen die Behauptung aus, dass ein Produkt sich nicht in jedem Falle ändere, wenn sich ein Faktor desselben ändert, ferner, dass ein Produkt verschwinden könne, ohne dass einer seiner Faktoren verschwindet. Diese Sätze stützen sich auf den ebenso unrichtigen Satz, dass die Gleichung $\xi^2 = 0$ unendlich viel Wurzeln $\xi = x_1 \iota_1 + x_2 \iota_2 + x_3 \iota_3$ habe, nämlich alle die, für welche $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ sei. Hiernach müsste $x_1 = 1$, $x_2 = \sqrt{-1}$, $x_3 = 0$ eine Wurzel geben, und zwar die Wurzel $\xi = \iota_1 + \iota_2 \sqrt{-1}$. Quadrirt man diesen Werth; so kömmt $\xi^2 = \iota_1 \iota_1 - \iota_2 \iota_2 + (\iota_1 \iota_2 + \iota_2 \iota_1) \sqrt{-1}$. Die ersten beiden Glieder $\iota_1 \iota_1 - \iota_2 \iota_2$ reduziren sich nach den Grundrelationen auf null. Die letzten beiden Glieder reduziren sich jedoch nur durch die falsche Relation $\iota_2 \iota_1 = - \iota_1 \iota_2$ auf null, nicht aber durch die richtige Relation $\iota_2 \iota_1 = \iota_1 \iota_2 = - \iota_3$. Vermöge der letzteren hat man $\xi^2 = 2 \iota_1 \iota_2 \sqrt{-1} = - 2 \iota_3 \sqrt{-1}$. Dieser Werth ist aber entschieden nicht gleich null, weil sonst $\iota_3 = 0$ sein müsste, was der dritten Grundbedingung widerspricht.

Dass überhaupt ein Quadrat ξ^2, dessen Wurzel ξ einen von null verschiedenen Quantitätswerth hat, niemals gleich null sein kann, welche Form auch die Wurzel ξ habe, ist nach unseren Grundprinzipien so einleuchtend, dass Niemand, welcher sich mit diesen Prinzipien nur einigermaassen vertraut macht, an der Absurdität des Gegentheils zweifeln kann. Immer verlangt die Quadrirung von ξ oder auch die Multiplikation des Multiplikands ξ mit dem Multiplikator ξ, dass jener in demselben Verhältnisse verändert (vergrössert, verkleinert, gedreht) werden soll, in welchem die Einheit 1 verändert ist, um den Multiplikator zu erzeugen. Ist also die Quantität a von ξ ein endliches Vielfaches oder ein endlicher Theil von 1; so ist auch die Quantität von ξ^2 ein endliches Vielfaches oder ein endlicher Theil von a, nämlich stets gleich a^2, und zeigt der vom Anfangspunkte der Grösse ξ nach deren Endpunkte führende Vektor eine Drehung gegen die Grundrichtung der Einheit um den Winkel α; so hat der Vektor von ξ^2 unfehlbar den doppelten Drehungswinkel. Das Quadrat ξ^2, sowie jede Potenz ξ^n von endlichem Grade kann niemals null werden, wenn der Quantitätswerth von ξ verschieden von null ist.

Zu den obigen Relationen gesellt sich auch die Relation

$$\frac{1}{\iota} = \frac{\iota}{\iota \iota} = - \iota$$

Verbindet man diese Formel mit den obigen; so giebt

$$\iota_1 \iota_2 \iota_3 = \iota_2 \iota_3 \iota_1 = \iota_3 \iota_1 \iota_2 = 1$$

durch Multiplikation resp. mit $\frac{1}{\iota_3}, \frac{1}{\iota_1}, \frac{1}{\iota_2}$ die Relationen

$$\iota_1 \iota_2 = - \iota_3 \qquad \iota_2 \iota_3 = - \iota_1 \qquad \iota_3 \iota_1 = - \iota_2$$

Wenn man mit der ersten dieser Relationen in 1 dividirt, kömmt $\frac{1}{\iota_1 \iota_2} = \iota_3$. Betrachtet man nun den Bruch mit dem Nenner $\iota_1 \iota_2$ als ein Produkt der beiden Brüche $\frac{1}{\iota_1}$, $\frac{1}{\iota_2}$ und setzt dann diese Brüche resp. gleich $-\iota_1$ und $-\iota_2$; so kömmt auch $\iota_1 \iota_2 = \iota_3$. Durch dieses Kunststück ist es gelungen, dem Produkte $\iota_1 \iota_2$ einmal den Werth ι_3 und einmal den Werth $-\iota_3$ zu verleihen: man kann eben mit jenen Formeln machen, was man will.

Im Allgemeinen ist nach dem Quaternionenkalkul $\iota_2 \iota_1$ nicht $= \iota_1 \iota_2$. Dann ist aber auch, wenn man beiderseits mit ι_2 dividirt, $\frac{\iota_2 \iota_1}{\iota_2}$ nicht $= \iota_1$. Überhaupt sind für zwei Quaternionen a und b die Formeln $b \cdot \frac{a}{b} = a$ und $\frac{ba}{b} = a$ im Allgemeinen falsch (vergl. Hankel, §. 44).

In Hankel's Schrift S. 142 befindet sich, wie schon erwähnt, unter den Grundgleichungen (1) die Relation $\iota_1 \iota_2 \iota_3 = +1$, welche sich aus der Anschauung rechtfertigen würde, dass drei aufeinander folgende Drehungen um drei rechtwinklige Axen in die ursprüngliche Richtung zurückführen. Mit dieser Relation vertragen sich aber, wie vorhin gezeigt, gewisse andere Relationen nicht, insbesondere nicht die Relation $\iota_1 \iota_2 = \iota_3$. Nun findet sich aber auf derselben Seite 142 Z. 23 v. o. bei Hankel auch die Relation $\iota_1 \iota_2 \iota_3 = -1$, welche das Gegentheil von der unter den Grundformeln (1) enthaltenen aussagt. Nimmt man die letztere als die richtige und die betreffende unter den Grundformeln als die unrichtige, vielleicht auf einem Druckfehler beruhende an; so verträgt sich mit ihr wohl die Relation $\iota_1 \iota_2 = \iota_3$: allein dafür entsteht nun der angezeigte Widerspruch dieser Relation mit der geometrischen Anschauung, welche $\iota_1 \iota_2 = -\iota_3$ fordert.

Unverzagt wiederholt in der im Jahre 1876 erschienenen Theorie der Quaternionen im Wesentlichen dieselben Grundformeln, jedoch findet sich hier in §. 48 die Formel $\iota_1 \iota_2 \iota_3 = -1$. Den Ausgangspunkt bilden hier die Relationen $\iota_1 \iota_2 = \iota_3$, $\iota_2 \iota_3 = \iota_1$, $\iota_3 \iota_1 = \iota_2$, mit welchen sich, wie oben gezeigt, die Formel $\iota_1 \iota_2 \iota_3 = -1$, nicht aber die geometrische Anschauung verträgt.

Bei Unverzagt findet sich eine Begründung der drei Fundamentalrelationen $\iota_1 \iota_2 = \iota_3$, $\iota_2 \iota_3 = \iota_1$, $\iota_3 \iota_1 = \iota_2$, bei Hankel nicht. Ich weiss nicht, ob jene Begründung von Unverzagt oder von Hamilton herrührt; soviel aber erkenne ich, dass sie unrichtig ist. Denn wenn nach §. 48 auf S. 161 OA, OB, OC die drei Kanten einer rechtwinkligen Ecke von der Länge einer Einheit sind, und wenn die Zeichen ι_1, ι_2, ι_3 die Bedeutung der Verhältnisse

$$\iota_1 = \frac{OC}{OB},\quad \iota_2 = \frac{OA}{OC},\quad \iota_3 = \frac{OB}{OA}$$

haben, ergiebt eine Multiplikation der Werthe von ι_1 und ι_2 miteinander

$$\iota_1 \iota_2 = \frac{OC}{OB} \cdot \frac{OA}{OC} = \frac{OA}{OB}.$$

Die Grösse $\frac{OA}{OB}$ auf der rechten Seite mit ihrem reziproken Werthe $\frac{OB}{OA} = \iota_3$ zu vertauschen, um daraus die erste Grundformel $\iota_1 \iota_2 = \iota_3$ herzustellen, ist durchaus unzulässig; das eine Verhältniss hat immer den entgegengesetzten Werth des anderen, d. h. es ist $\frac{OA}{OB}$ nicht $= \frac{OB}{OA}$, sondern $= -\frac{OB}{OA}$. Um sich von der Wahrheit dieser Behauptung zu überzeugen, braucht man nur zu beachten, dass für den Fall, wo OA in der primären Axe OX, OB in der sekundären Axe OY, und OC in der tertiären Axe OZ liegt, $OA = 1$, $OB = \sqrt{-1}$ ist, dass also, welchen Werth auch OC haben möge,

$$\iota_1 = \frac{OC}{\sqrt{-1}} \quad \iota_2 = \frac{1}{OC} \quad \iota_3 = \frac{\sqrt{-1}}{1}$$

und ferner, da man

$$\frac{OB}{OA} = \frac{\sqrt{-1}}{1} = \sqrt{-1}$$

hat,

$$\frac{OA}{OB} = \frac{1}{\sqrt{-1}} = -\sqrt{-1} = -\frac{OB}{OA}$$

ist. Hieraus folgt nun aber, dass

$$\iota_1 \iota_2 \text{ nicht} = \iota_3, \text{ sondern} = -\iota_3$$

und dass demzufolge nach beiderseitiger Multiplication mit ι_3

$$\iota_1 \iota_2 \iota_3 = -\iota_3^2 \text{ nicht} = -1, \text{ sondern} = +1$$

ist.

Der falsche Schluss $\iota_1 \iota_2 = \iota_3$ wird auf S. 162 durch ein Verfahren gewonnen, wofür ich dem Erfinder die Verantwortung überlasse. Anstatt das Produkt $\iota_1 \iota_2$ direkt durch Substitution der Werthe von ι_1 und ι_2 in der Form $\frac{OC}{OB} \cdot \frac{OA}{OC}$ herzustellen, in welcher Form sich sofort der Werth $\frac{OA}{OB} = -\iota_3$ ergeben würde, wird erst mit ι_1 die Transformation $\iota_1 = \frac{OC}{OB} = \frac{OB_1}{OC}$ vorgenommen, worin OB_1 die entgegengesetzte

Lage von OB haben soll, also $= -OB$ ist. Ebenso wird $\iota_2 = \frac{OA}{OC}$ $= \frac{OC}{OA_1}$ gesetzt, worin $OA_1 = -OA$ ist. Hierdurch wird nun

$$\iota_1 \iota_2 = \frac{OB_1}{OC} \cdot \frac{OC}{OA_1} = \frac{OB_1}{OA_1} = \frac{-OB}{-OA} = \frac{OB}{OA} = \iota_3$$

Durch diese Manipulation gelingt es, das Produkt $\iota_1 \iota_2$, welches nach unmittelbarer Ableitung $= \frac{OA}{OB}$ ist, als $\frac{OB}{OA}$ darzustellen. Schade nur, dass die Substitutionen

$$\frac{OC}{OB} = \frac{OB_1}{OC} = \frac{-OB}{OC}$$
$$\frac{OA}{OC} = \frac{OC}{OA_1} = \frac{OC}{-OA}$$
$$\frac{OB}{OA} = \frac{OA}{OB_1} = \frac{OA}{-OB}$$

völlig unstatthaft sind, da sie

$$OA^2 = -OC^2$$
$$OB^2 = -OC^2$$
$$OA^2 = -OB^2$$

also die absurde Forderung enthalten, dass OA^2 gleich OB^2 und auch gleich $-OB^2$, dass mithin $+1 = -1$ sein solle!

Höchst merkwürdig stechen bei Unverzagt die auf S. 163 sub Nr. 3 gegebenen Gleichungen von den ihnen vorhergehenden ab. Indem hier zuerst statt i der Buchstabe j für ganz dieselben Verhältnisse gebraucht, nach Herstellung des Resultates auf S. 164 aber wieder in i umgewandelt wird, ergeben sich für das Produkt aus drei Zeichen i_1, i_2, i_3 Werthe, für welche man nach dem Verfahren auf S. 162 die entgegengesetzten Zeichen erhalten würde. Man glaubt in einem Wunderlande zu sein.

Wir heben noch hervor, dass nach dem Quaternionenkalkul von Hamilton sowohl bei Hankel, als auch bei Unverzagt das Produkt zweier Zeichen wie ι_1 und ι_2 in der Reihenfolge $\iota_1 \iota_2$ einen anderen Werth hat, als in der Reihenfolge $\iota_2 \iota_1$, indem $\iota_2 \iota_1 = -\iota_1 \iota_2$ sein soll. Da die Zeichen ι_1 und ι_2 dazu bestimmt sind, neutrale Operationen anzuzeigen, und da das Resultat zweier neutralen Operationen, weil sie sich nicht beeinflussen, nicht von der Reihenfolge derselben abhängen kann; so ist die Formel $\iota_2 \iota_1 = -\iota_1 \iota_2$, sowie die Formel $\iota_3 \iota_2 \iota_1 = -\iota_1 \iota_2 \iota_3$ ein Widerspruch gegen die logischen Grundprinzipien. Diese Formeln werden auch nur durch Eskamotage gewonnen: damit $\iota_1 \iota_2$ den Werth ι_3 annehme, wird die oben bezeichnete Transformation vorgenommen, welche das falsche Resultat $\iota_1 \iota_2 = \frac{OB_1}{OA_1}$ liefert; damit aber $\iota_2 \iota_1$ den

Werth $-\iota_3$ annehme, wird ohne Transformation mittelst direkter Substitution

$$\iota_2 \iota_1 = \frac{OA}{OC} \cdot \frac{OC}{OB} = \frac{OA}{OB} = \frac{1}{\iota_3} = -\iota_3$$

gesetzt, was ein richtiges Resultat liefert. Man fragt sich verwundert, warum nach dieser Rechnung nicht auch

$$\iota_1 \iota_2 = \frac{OC}{OB} \cdot \frac{OA}{OC} = \frac{OA}{OB} = \frac{1}{\iota_3} = -\iota_3$$

sei. Hierauf giebt der §. 47 bei Unverzagt die Antwort. Es wird dort an der Figur 20 demonstrirt, dass das Produkt der beiden Verhältnisse $q_1 = \frac{OB}{OA}$ und $q_2 = \frac{OC}{OB}$ von der Reihenfolge der Faktoren abhänge, indem das Produkt $q_2 q_1 = \frac{OC}{OB} \cdot \frac{OB}{OA}$ die Abkürzung auf $\frac{OC}{OA}$ gestatte, das Produkt $q_1 q_2 = \frac{OB}{OA} \cdot \frac{OC}{OB}$ jedoch nicht, dass das letztere vielmehr erst durch die Substitution $q_1 = \frac{-OA}{OB}$, $q_2 = \frac{OB}{-OC}$, also in der Form $\frac{-OA}{OB} \cdot \frac{OB}{-OC}$ die Abkürzung $\frac{-OA}{-OC}$ ermögliche, dass jedoch dieser Werth von $\frac{-OA}{-OC}$ im Allgemeinen nicht gleich $\frac{OC}{OA}$ sei. Wir haben schon vorhin die Unzulässigkeit dieser Substitutionen nachgewiesen, da dieselben zu dem Widerspruche $+1 = -1$ führen und glauben daher gern, dass Hamilton nach den Referaten Hankel's und Unverzagt's grosse Schwierigkeiten zu überwinden hatte, um zur Erkenntniss des Prinzipes der Abhängigkeit des Produktes von der Reihenfolge seiner neutralen Faktoren durchzudringen, da dieses sogenannte Prinzip den Grundgesetzen des Denkens widerspricht und nur durch Trugschlüsse gewonnen werden kann.

Der Quaternionenkalkul ist ein so merkwürdiges Beispiel von Verirrung, dass sich unser längeres Verweilen bei demselben, namentlich aber die Forschung nach dem Grunde der Täuschung im Interesse der Wissenschaft rechtfertigt. In letzterer Hinsicht haben wir nun darauf aufmerksam zu machen, dass von den oben erwähnten Substitutionen für q_1 und q_2, wenn die drei Linien OA, OB, OC normal aufeinander stehen, unter Umständen die eine, nicht aber beide zugleich statthaft sind. Es kann nämlich möglicherweise

$$q_1 = \frac{OB}{OA} = \frac{-OA}{OB}$$

sein; Diess setzt voraus, dass $OB^2 = -OA^2$, also $\frac{OB}{OA} = \sqrt{-1}$ ist. Setzt

man aber zugleich

$$q_2 = \frac{OC}{OB} = \frac{OB}{-OC}$$

so muss auch $OB^2 = -OC^2$ oder $\frac{OB}{OC} = \sqrt{-1}$, also $OA = OC$ sein, was der Bedingung der Rechtwinkligkeit zwischen OA und OC zuwiderläuft.

Diese Substitution beruht auf demselben Irrthume, auf welchem die drei Grundformeln

$$\iota_1^2 = -1 \quad \iota_2^2 = -1 \quad \iota_3^2 = -1$$

des Quaternionenkalkuls beruhen. Hiervon ist eine möglich, nicht aber alle drei zugleich. Denn $\iota^2 = \iota\iota$ zeigt die Wiederholung der Operation ι an dem durch die erstmalige Ausführung erlangten Resultate an, z. B. den Übergang von OX zu OY und dann von OY zu OX_1, also überhaupt den Übergang von einer Richtung OX zu der ihr entgegengesetzten Richtung OX_1. Nun kann wohl in irgend einer beliebigen durch die Grundaxe XX_1 gehenden Ebene $OX_1 = -OX$, also

$$\frac{OX_1}{OX} = -1 = \iota_1^2$$

sein, sodass dann $\iota_1 = \sqrt{-1}$ ist; es kann aber alsdann nicht noch in einer anderen auf der Grundebene XY normal stehenden Ebene, z. B. in der Ebene YZ

$$OY_1 = -OY$$

oder

$$\frac{OY_1}{OY} = -1 = \iota_2^2$$

folglich auch $\iota_2 = \sqrt{-1}$ sein. Die Drehung in der Ebene YZ kann unmöglich durch dasselbe Zeichen dargestellt werden wie die Drehung in der Ebene XY.

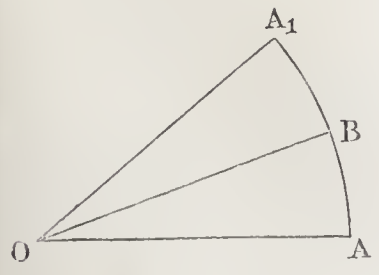
Alle diese Fehlgriffe entspringen aus dem Mangel der Erkenntniss der wahren Grundeigenschaften der Grössen, insbesondere aus der in der heutigen Mathematik überhaupt noch fehlenden Vorstellung von der Neutralität. Hamilton's Grundgedanke ist die arithmetische Darstellung der Drehungen um drei feste Axen; diese Drehungen hält er für Grundoperationen. Dieselben haben aber durchaus nicht den Charakter von arithmetischen Grundoperationen, sie stehen auch gar nicht in absolutem Neutralitätsverhältnisse zu einander und ihr Resultat ist nicht von der Reihenfolge unabhängig. Ausserdem haben die angenommenen drei Axen keine absolut feste Richtung im Raume, sondern können in demselben Grössensysteme nach Willkür bald in diesen, bald in jenen Richtungen angenommen werden, sind also überhaupt keine festen Basen für die Anschauung.

Es bedarf keines besonderen arithmetischen Nachweises, dass, wenn α eine Drehung um die feste Axe OZ und β eine Drehung um die feste Axe OX ist, man eine ganz andere Richtung erhält, jenachdem man nach der Formel $\alpha \,.\, \beta$ erst um OZ und dann um OX, oder nach der Formel $\beta \,.\, \alpha$ erst um OX und dann um OZ dreht. Es ist auch klar, dass wenn α_1, α_2, α_3 . . . mehrere Drehungen um OZ und β_1, β_2, β_3 . . . mehrere Drehungen um OX bezeichnen, eine spätere Drehung um eine feste Axe OZ nicht als die Fortsetzung einer früheren Drehung um dieselbe Axe erscheint, wenn eine Drehung um die andere Axe OX dazwischen liegt, dass also $\alpha_1 \beta_1 \alpha_2$ nicht gleich $\alpha_1 \alpha_2 \beta_1$ ist, dass überhaupt jede Verstellung der Zeichen in der Formel $\alpha_1 \beta_1 \alpha_2 \beta_2 \alpha_3 \beta_3 \ldots$ ein anderes Resultat liefert.

Nach dieser Auffassung kann jede gegebene Richtung durch unzählig viel verschiedene Operationen aus der Grundrichtung entstanden sein; einer bestimmten Richtung kömmt also kein bestimmter arithmetischer Werth zu. Andererseits kann durch die Multiplikation mit einunddemselben Koefficienten ι eine Linie OA in jede beliebige auf ihr normal stehende Richtung, also in unzählig viel verschiedene Richtungen OA', OA'', OA''' u. s. w. gebracht werden. Alle diese Richtungen erscheinen nach den Prinzipien des Quaternionenkalkuls arithmetisch einander gleich, nämlich gleich $OA \,.\, \iota$, obgleich sie doch geometrisch ganz verschieden sind. Will man aber unter ι keine bestimmte, sondern eine völlig unbestimmte, unendlich vieldeutige Grösse verstehen, welche je nach der Ebene, in welcher die Drehung um 90 Grad erfolgt, verschiedene Werthe annimmt, wie es nach der Bemerkung von Unverzagt auf S. 161 geschehen soll; so ist dieses Symbol wegen der vollkommenen Unbekanntschaft seines Werthes und seiner Abhängigkeit von der Lage der oben erwähnten Ebenen überall keine Grösse von arithmetischem Werthe.

Solche Voraussetzungen können unmöglich die wahren Grundlagen einer allgemeinen arithmetischen Rechnung sein, da ihr die absoluten Basen und Grundoperationen fehlen, welche unser „Situationskalkul“ und die „Naturgesetze“, namentlich das in §. 497 daselbst ausführlich dargelegte Kardinalprinzip in der Deklination und Inklination, d. h. in der Drehung um einen Nullpunkt O und in der Wälzung um eine Grundaxe OX darbietet.

Fig. 1.



Der Mangel eines sicheren Fundamentes verleitet Hamilton zu folgendem Prinzipienfehler, welcher bei Unverzagt in §. 47 auf S. 158 den Ausgangspunkt des Quaternionenkalkuls bildet. Wenn nach Fig. 1 OA, OB, OA_1 drei Linien in einer Ebene sind, von welchen sich OA_1 gegen OB unter demselben Winkel neigt wie OB gegen OA; so wird das Verhältniss von OA_1 zu OB dem Verhältnisse von OB zu OA gleich geachtet, und demzufolge

$$q_1 = \frac{OB}{OA} = \frac{OA_1}{OB}$$

gesetzt. Dieser Satz ist nur relativ, nicht absolut richtig, er ist nur wahr für die Anschauung, nicht für die begriffliche Erkenntniss, er hat nur eine geometrische, keine arithmetische Gültigkeit. Er setzt nämlich voraus, dass man den Standpunkt der Anschauung in der Ebene der Figur AOA_1 wie in einer Grundebene wähle, und eine in dieser Ebene liegende, durch O gehende Linie zur Grundaxe nehme; derselbe verlangt also, dass sich der Geist mit den Grundlagen seines mathematischen Denkens, mit der Grundaxe und der Grundebene, also mit den Grundeinheiten seiner Rechnung auf die Wanderung begebe, um dieselbe nach der Besonderheit des Falles zu variiren. Ein solches Verfahren ist durchaus unzulässig; die arithmetische Auffassung fordert unabweislich absolute oder unbedingt feste Einheiten, Nullpunkte, Grundaxen, Grundebenen. Für einen festen Nullpunkt mit fester Grundaxe, fester Grundebene, fester Einheit ist aber der vorstehende Hamiltonsche Satz nicht allein eine unerwiesene, willkürliche Behauptung, sondern er ist geradezu falsch. Ihm liegt nämlich die Auffassung zu Grunde, dass wenn λ die Längeneinheit ist, und α, β zwei Richtungskoeffizienten vertreten,

$$OA = \alpha\lambda,\ OB = \alpha\lambda \times \beta = \alpha\beta\lambda,\ OA_1 = \alpha\beta\lambda \times \beta = \alpha\beta^2\lambda,$$

mithin

$$\frac{OB}{OA} = \frac{OA_1}{OB} = \beta$$

sei. Wo liegt aber die Berechtigung, für OA, OB, OA_1 Ausdrücke von der Form $\alpha\lambda$, $\alpha\beta\lambda$, $\alpha\beta^2\lambda$ vorauszusetzen? Wäre es mit Rücksicht auf die Veränderlichkeit der Lage der Ebene AOA_1 nicht ebenso motivirt oder vielleicht motivirter, für die drei Linien Ausdrücke von der Form

$$OA = a + \alpha\lambda,\ OB = a + \alpha\beta\lambda,\ OA_1 = a + \alpha\beta^2\lambda$$

anzunehmen? Alsdann wäre aber

$$\frac{OB}{OA} = \frac{a + \alpha\beta\lambda}{a + \alpha\lambda}$$

$$\frac{OA_1}{OB} = \frac{a + \alpha\beta^2\lambda}{a + \alpha\beta\lambda}$$

und diese beiden Verhältnisse wären entschieden ungleich.

Wenn man ohne Feststellung der Grundeigenschaften und Grundoperationen die Grössen, mit welchen man eine neue Rechnungsart inauguriren will, sofort zur Ausführung derselben schreitet, indem man einen Satz wie den vorstehenden wie einen Grundsatz voranstellt, wäre doch mindestens die Frage zu erörtern gewesen, ob Linien, welche in einunddemselben Verhältnisse zueinander stehen, nothwendig in einunddersel ben Ebene liegen können und liegen müssen. Ich

behaupte nun, dass Diess ganz unmöglich ist, dass vielmehr Linien, welche ein konstantes arithmetisches Verhältniss zueinander haben, im Allgemeinen in verschiedenen Ebenen liegen.

Den Beweis dieser Behauptung liefern die Prinzipien des „Situationskalkuls“ und die „Naturgesetze“ in folgender Weise. Wenn das Verhältniss der beiden Linien OB und OA, sowie das der beiden Linien OA_1 und OB den gegebenen allgemeinen Werth $q_1 = e^{\phi\sqrt{-1}}\, e^{\psi\sqrt{\div 1}}$ und die Linie OA den Werth $OA = \lambda e^{\alpha\sqrt{-1}}\, e^{\beta\sqrt{\div 1}}$ hat; so muss die zweite Linie

$$OB = q_1\, OA = \lambda e^{(\alpha+\phi)\sqrt{-1}} e^{(\beta+\psi)\sqrt{\div 1}}$$

und die dritte Linie

$$OA_1 = q_1\, OB = \lambda e^{(\alpha+2\phi)\sqrt{-1}} e^{(\beta+2\psi)\sqrt{\div 1}}$$

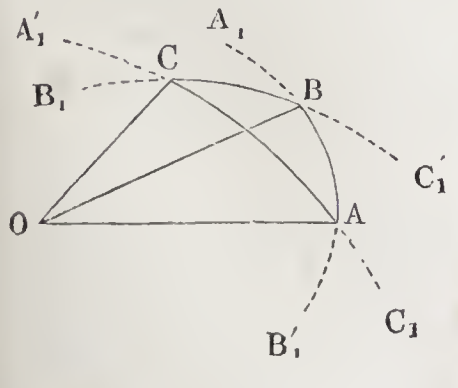
sein. Der einfachste Fall ist der, wo OA in der Grundaxe OX liegt, also $\alpha = 0$, $\beta = 0$,

$$OA = \lambda \quad OB = \lambda e^{\phi\sqrt{-1}} e^{\psi\sqrt{\div 1}} \quad OA_1 = \lambda e^{2\phi\sqrt{-1}} e^{2\psi\sqrt{\div 1}}$$

Die erste dieser drei Linien liegt in der Grundaxe OX; die zweite liegt in einer Ebene, welche durch OX geht und sich unter dem Winkel ψ gegen die Grundebene XY neigt; die dritte liegt in einer Ebene, welche gleichfalls durch die Grundaxe OX geht und sich unter dem Winkel 2ψ gegen die Grundebene XY neigt. Die drei Linien OA, OB, OA_1, welche gleiche Neigung gegeneinander haben, oder in gleichen Verhältnissen zueinander stehen, liegen also nicht in einer Ebene.

Dieses Resultat leuchtet auch sofort durch geometrische Anschauung ein, wenn man zuerst die Linie OA in der Grundaxe OX und dann eine beliebig dagegen geneigte Linie OB annimmt. Um eine Linie OA_1 zu erhalten, welche sich ebenso zu OB verhält, wie OB zu OA, muss, von OB weiterschreitend, nicht bloss der Deklinationswinkel $AOB = \varphi$ wiederholt oder die Deklinationsdrehung φ gemacht, sondern es muss auch die Wälzung ψ ausgeführt, nämlich die Ebene, in welcher der Winkel A_1OB liegt, ebenso gewälzt werden, wie die Ebene BOA gewälzt war, um aus der Lage der Grundebene in die Lage AOB zu gelangen.

Fig. 2.



Wir haben schon erwähnt, dass die Formel für q_1, welche die Gleichheit der beiden Verhältnisse $\frac{OB}{OA}$ und $\frac{OA_1}{OB}$ postulirt, nur eine relative Richtigkeit hat, dass sie nämlich nur dann gilt, wenn die Ebene der drei Linien OA, OB, OA_1 die Grundebene ist. Nun kann man zwar für Operationen, welche in einunderselben Ebene vor sich gehen, diese Ebene zur Grundebene wählen;

allein man kann nicht bei Operationen, welche in verschiedenen Ebenen erfolgen, mehrere Ebenen zugleich als Grundebenen ansehen. Wenn also die drei Linien OA, OB, OC (Fig. 2) in verschiedenen Ebenen liegen, kann nicht zugleich

$$q_1 = \frac{OB}{OA} = \frac{OA_1}{OB} = \frac{OA}{OB_1'}$$

$$q_2 = \frac{OC}{OB} = \frac{OB_1}{OC} = \frac{OB}{OC_1'}$$

und noch weniger auch

$$q_3 = \frac{OA}{OC} = \frac{OC_1}{OA} = \frac{OC}{OA_1'}$$

gesetzt werden. Demnach ist

weder $$q_2 q_1 = \frac{OC}{OA}$$

noch $$q_1 q_2 = \frac{OA_1}{OC_1'}$$

und auch nicht

$$q_2 q_1 = -q_1 q_2$$

Wenn die nicht gerechtfertigte Gleichheit der Verhältnisse ausgeschlossen wird, giebt die Bezeichnung der Verhältnisse $\frac{OB}{OA}$, $\frac{OC}{OB}$, $\frac{OA}{OC}$ resp. mit q_1, q_2, q_3 stets das selbstverständliche Produkt

$$q_1 q_2 q_3 = \frac{OB}{OA} \cdot \frac{OC}{OB} \cdot \frac{OA}{OC} = 1$$

nicht aber die Formel $q_1 q_2 q_3 = -1$ oder für den speziellen Fall einer rechtwinkligen Ecke $\iota_1 \iota_2 \iota_3 = -1$.

Die ganze Deduktion in §. 47 nicht minder wie die in §. 48 von Unverzagt's Schrift, wo mit Quaternionen gerechnet wird, welche in verschiedenen Ebenen liegen, muss befremden, da sie der in §. 45 aufgestellten Grundbedingung des Parallelismus jener Ebenen für solche Rechnungen widerspricht. Hier wird im Satze 4 ausdrücklich anerkannt, dass man zu unrichtigen Rechnungen gelangen würde, wenn man die Quaternionen aus den Kanten einer Ecke bilden wollte.

Aus unrichtigen Grundlagen kann nur eine unrichtige Theorie entspringen. Wie geht es nun zu, dass das Hamiltonsche Zauber-Einmaleins doch nicht lauter Absurditäten, sondern auch richtige Sätze erzeugt? Das begreift sich leicht, wenn man die Anwendung desselben auf die Geometrie genauer ins Auge fasst. Indem man die Rechnung mit den Symbolen $\iota_1, \iota_2, \iota_3$, welche in der Fiktion drei rechtwinklig gegen-

einander geneigte Richtungen in jeder beliebigen Lage oder drei Drehungen von 90^0 in drei beliebigen rechtwinkligen Ebenen oder um drei beliebige rechtwinklige Axen vertreten, stets mit der geometrischen Anschauung begleitet, also die geometrische Verschiedenheit, welche in den drei arithmetisch einander gleich gesetzten Potenzen $\iota_1\iota_1, \iota_2\iota_2, \iota_3\iota_3$ liegt, in der Anschauung gehörig berücksichtigt, auch bei dem Übergange von einer rechtwinkligen Ecke zu einer anderen den Grössen $\iota_1, \iota_2, \iota_3$ eine darauf bezügliche veränderte Bedeutung ertheilt, oder indem man immer nur Drehungen betrachtet, welche in einunddersel̈ben Ebene vor sich gehen, sodass von den drei Grössen ι_1, ι_2, ι_3, nur eine, welche nun den Werth $\sqrt{-1}$ annimmt, eine Bedeutung hat, kann man mit Hülfe jener Symbole richtige geometrische Sätze ableiten. Man rechnet und konstruirt zugleich, wie es ja in der analytischen Geometrie, die ein Gemisch von Abstraktion und Anschauung ist, ebenfalls geschieht. In dieser Weise gebraucht, ist der Quaternionenkalkul eine Art von geometrischer Zeichensprache. Als solche kann derselbe unter Umständen ganz gute Dienste leisten; er enthält jedoch nicht diejenige Verallgemeinerung der arithmetischen Abstraktionen, welche von der Ebene in den Raum führt, und ist überhaupt als abstrakte Operation, selbst wenn man von seiner Beziehung zum Raume ganz absehen wollte, nicht generell zu gebrauchen, da er auf Voraussetzungen beruht, welche mit den Prinzipien einer rationellen Rechnung im Widerspruche stehen. Die Multiplikationen mit den Grössen ι_1, ι_2, ι_3 müssten Hauptstufen der Multiplikation im Systeme der Grundoperationen, also neutral gegeneinander oder ohne Einfluss aufeinander sein, dieselben müssten daher unbeschadet des Endresultates miteinander vertauscht werden können: Solches fordert unser System der Grundoperationen und Grundsätze. Diese Bedingung erfüllen jene Operationen aber nicht; sie dürfen im Allgemeinen nicht vertauscht werden, sie beeinflussen sich, sind nicht neutral und demzufolge keine Hauptstufen der Richtung, also Nichts weiter wie Symbole für gewisse zusammengesetzte und vieldeutige Prozesse, insbesondere für die im „Situationskalkul“ §. 28, Nr. 5, sowie in §. 36 und 37 erörterten und daselbst nach richtigen arithmetischen Prinzipien in Rechnung gestellten Drehungsprozesse.

Dass unser Situationskalkul derartige Unbestimmtheiten und Unrichtigkeiten nicht enthält, dass er streng und konsequent ist, dass er keine exzeptionellen Operationen erfordert, welche sich den allgemeinen Regeln der arithmetischen Rechnung entziehen, dass er die anschaulichen Dimensionen des Raumes wirklich auf abstrakte Begriffe bringt, also das Gebiet der Zahlenebene thatsächlich durchbricht, und dass er schliesslich bei weitem einfacher ist, als der Quaternionenkalkul, dürfte schwerlich von Demjenigen bestritten werden, der sich die Mühe giebt, denselben näher anzusehen. Ein sprechender Belag für die grössere Einfachheit und Unmittelbarkeit des Situationskalkuls liefert eine Vergleichung der Operationen, welche zur Ableitung der in §. 54 von Unverzagt's

Schrift aufgeführten geometrischen Sätze mittelst des Quaternionenkalkuls erforderlich sind, mit den nach dem Situationskalkul hierzu dienenden. So liefert z. B. der dortige Satz Nr. 4 auf S. 203 und 204 sub I nach einer mehrfachen Rekursion auf geometrische Anschauung und durch eine sehr zerstückelte Rechnung eine einzelne Grundformel der sphärischen Trigonometrie. Eine zweite selbstständige Rechnung sub II ist nöthig, um eine zweite Grundformel darzustellen. Die dritte fehlt ganz und würde eine neue Rechnung erfordern. Unser Situationskalkul dagegen liefert in §. 28, sowie auch die Naturgesetze in §. 104 alle drei Grundformeln der sphärischen Trigonometrie, ja sogar die Formel für jedes sphärische Polygon mit einem Schlage aus einer ganz einfachen Betrachtung. Das Nämliche gilt von allen übrigen Beispielen.

Wenn man von der inneren Wahrheit unseres Kardinalprinzipes durchdrungen ist und das Wesen der Neutralität der drei Hauptstufen der Multiplikation richtig aufgefasst hat, also überzeugt ist, dass diese drei Hauptoperationen sich durchaus nicht beeinflussen dürfen, wird man geneigt sein, die Frage zu prüfen, ob sich die Operationen, welche Hamilton wie Grundoperationen behandelt, und welche im Situationskalkul die Rolle von zusammengesetzten Operationen spielen, nicht auch nach unseren Prinzipien in einfachere Formen bringen lassen. Indem man also die Vervielfachung oder numerische Multiplikation als die erste, die Drehung um den Nullpunkt in der Grundebene als die zweite und die Wälzung um die Grundaxe als die dritte Hauptoperation ansieht, wird man untersuchen, ob sich nicht die Drehungen in jeder beliebigen Ebene und die Wälzungen um jede beliebige Axe als eine Multiplikation mit Faktoren, welche sich stets auf die Grundeinheit und die Grundaxe beziehen, darstellen lassen.

Wenn a einen absoluten Quantitätswerth, $\varrho = e^{\alpha \sqrt{-1}}$ einen Deklinationskoeffizienten, $\sigma = e^{\beta \sqrt{\div 1}}$ einen Inklinationskoeffizienten bezeichnet; so ist jede beliebige Linie durch

$$OA = a\varrho\sigma = a e^{\alpha \sqrt{-1}} e^{\beta \sqrt{\div 1}}$$

dargestellt. Eine zweite Linie im Raume, welche die Länge aa', die Deklination $\alpha + \alpha'$ und die Inklination $\beta + \beta'$ hat, ist

$$OB = a\varrho\sigma \cdot a'\varrho'\sigma' = aa' \cdot \varrho\varrho' \cdot \sigma\sigma' = aa' e^{(\alpha + \alpha')\sqrt{-1}} e^{(\beta + \beta')\sqrt{\div 1}}$$

Jede dieser beiden Linien ist durch Vervielfältigung, Drehung und Wälzung aus der in der Grundaxe OX liegenden Einheit entstanden gedacht. Nehmen wir nun an, die zweite Linie OB solle nicht aus der Einheit, sondern aus der Linie OA durch einen einfachen Multiplikationsakt, also entweder durch einfache Vervielfältigung oder durch einfache Drehung in der Ebene AOB oder durch einfache Wälzung um eine beliebige Axe OU entstanden sein. Man erkennt sofort, dass eine einfache Vervielfältigung oder numerische Multiplikation hierzu nicht ausreicht, da die Vervielfältigung zu jeder Richtungsänderung wirklich

neutral ist und durch Vervielfältigung nicht die Richtung, auch durch Richtungsänderung nicht die Länge geändert wird. Es muss sich also immer mit einem numerischen Faktor, welchem in allen Fällen der Werth a' zu geben ist, eine Richtungsänderung verknüpfen, und es fragt sich bloss, ob Diess eine einfache Drehung oder eine einfache Wälzung sein könne.

Wäre die Richtungsänderung in der Ebene AOB arithmetisch durch einen Richtungskoeffizienten zu bewirken, welcher bei konstanter Inklination nur eine variabele Deklination anzeigte, also durch einen Koeffizienten von der Form

$$\varrho_1 \sigma_1 = e^{\alpha_1 \sqrt{-1}} e^{\beta_1 \sqrt{\div 1}}$$

worin σ_1 konstant und nur ϱ_1 oder der Winkel α_1 variabel wäre; so müsste (indem wir die Längenänderung jetzt ganz ausser Acht lassen)

$$\varrho\sigma . \varrho_1 \sigma_1 \text{ oder } \varrho\varrho_1 . \sigma\sigma_1 = \varrho\varrho' . \sigma\sigma'$$

und wegen der Neutralität der Deklination und Inklination nothwendig $\varrho\varrho_1 = \varrho\varrho'$ und $\sigma\sigma_1 = \sigma\sigma'$, also $\varrho_1 = \varrho'$ und $\sigma_1 = \sigma'$ sein. Diese beiden Bedingungen fordern aber eine Unmöglichkeit: denn da die Linie OB, indem sie die Ebene AOB durchläuft, einen variabelen Deklinations- und Inklinationskoeffizienten hat (es ändert sich bei dieser Bewegung sowohl ϱ', als σ', nämlich sowohl der Winkel α', als β'); so ist die Forderung, dass der konstante Koeffizient σ_1 dem variabelen σ' oder dass der konstante Winkel β_1 dem variabelen β' gleich bleibe, eine Ungereimtheit.

Ebensowenig kann die Bewegung von OA in die Richtung OB arithmetisch durch einen Richtungskoeffizienten $\varrho_1 \sigma_1$ bewirkt werden, welcher bei konstanter Deklination nur eine variabele Inklination oder Wälzung um irgend eine Axe anzeigt. Denn da auch jetzt $\varrho_1 = \varrho'$ und $\sigma_1 = \sigma'$ sein muss; so gelangt man zu der ungereimten Bedingung, dass der konstante Koeffizient ϱ_1 dem variabelen ϱ' oder dass der konstante Winkel α_1 dem variabelen α' gleich bleibe.

Hiernach kann der Übergang aus einer Richtung in eine andere allgemein nur der Multiplikation mit einem Richtungskoeffizienten $\varrho_1 \sigma_1$ entsprechen, in welchem zugleich die Deklination und die Inklination variabel ist, d. h. es muss Drehung und Wälzung zugleich stattfinden. Ausserdem muss $\varrho_1 = \varrho'$ und $\sigma_1 = \sigma'$ oder $\alpha_1 = \alpha'$ und $\beta_1 = \beta'$ sein, d. h. der Übergang von der Linie OA zu OB entspricht der Entstehung der zweiten Linie aus der Einheit auf dem Wege der Grundoperationen, d. h. durch Drehung um den Nullpunkt in der Grundebene XY und durch Wälzung dieser Grundebene um die Grundaxe OX.

Bei einer Bewegung von OA nach OB in der Ebene AOB ändert sich also zugleich die Deklination und die Inklination. Soll also bei dem Übergange von OB zu einer dritten Linie OA_1 die Gleichheit der Verhältnisse $OA : OB = OB : OA_1$ oder

$$q_1 = \frac{OB}{OA} = \frac{OA_1}{OB}$$

bestehen; so muss OA_1 ausserhalb der Ebene AOB liegen, die Hamiltonschen Anschauungen lassen sich also nicht auf arithmetische Grundprinzipien zurückführen.

Hamilton, obwohl er die Wichtigkeit der höheren komplexen Zahlen sehr wohl erkannt und eifrig nach der Erkenntniss derselben gestrebt hat, scheint doch nur den Nutzen vor Augen gehabt zu haben, welchen dieselben für die Geometrie des Raumes haben könnten, wesshalb er sich um die Erfindung „eines zur Behandlung der Geometrie des Raumes passenden Instrumentes“ bemüht hat (vergl. Hankel's Anmerkung auf S. 194). Ich habe bereits anerkannt, dass die Quaternionen als eine Zeichensprache zu diesem Zwecke wohl zu verwenden sind, dessenungeachtet muss ich in Abrede stellen, dass sie die arithmetischen Begriffe über das Gebiet der Zahlenebene hinaus erweitern. Diess geht daraus hervor, dass die Zeichen $\iota_1, \iota_2, \iota_3$, welche an sich gar keine bestimmten Grössen sind, keinen festen Werth haben und keine Definition zulassen, nur mit reellen und komplexen Grössen, also nur mit Grössen aus der Zahlenebene verknüpfbar sind: wenigstens kennt der Quaternionenkalkul keine anderen als komplexe Koeffizienten; derselbe bleibt also vor der Schranke, welche er zu durchbrechen sich bemüht, unbeweglich stehen.

Ausserdem scheint mir die Verknüpfung der Quaternionen mit komplexen Grössen nach Unverzagt, §. 53, S. 197 und 198, und die daraus hervorgehende Biquaternion oder komplexe Quaternion, da doch in der einfachen Quaternion bereits die Richtungsverschiedenheit, also das Wesen des Komplexen enthalten sein sollte, den Gipfel der Begriffsverwirrung zu erreichen.

Nur mit solchen unlogischen Hülfsmitteln ist es möglich, das bei Unverzagt auf S. 197 angeführte, angeblich von Tait aufgefundene Resultat zu erzielen, wonach das Produkt zweier komplexen Quaternionen null werden kann, ohne dass eine derselben null wird.

Hierzu kömmt, dass die drei Zeichen $\iota_1, \iota_2, \iota_3$ keiner Verallgemeinerung fähig, also nur im dreidimensionalen Raume verwendbar sind, während doch das abstrakte arithmetische Kardinalprinzip die Schranke der Anschauung von drei Dimensionen nicht kennt.

In späterer Zeit, nämlich im Jahre 1862, hat Grassmann seine Ausdehnungslehre veröffentlicht. In derselben spielen auch die imaginären und andere Einheiten eine Rolle: die letzteren (mit e_1, e_2, e_3 bezeichnet, und in §. 216 als drei Normalen gedeutet) beruhen auf denselben Vorstellungen wie die Einheiten in den Hamiltonschen Quaternionen. Grassmann sagt in der Vorrede (S. VIII) ausdrücklich, dass ihm bei seinen früheren Arbeiten die Bedeutung der imaginären Zahlen und die Arbeiten über die geometrische Addition der Strecken unbekannt gewesen seien. Ob nun zu den ihm bei der Bearbeitung der Ausdehnungslehre bekannt gewordenen Arbeiten der neun Jahr früher erschienene Quaternionenkalkul von Hamilton, sowie mein elf Jahr früher erschienener Situationskalkul und mein siebzehn Jahre früher erschie-

nenes Buch „Über das Verhältniss der Arithmetik zur Geometrie, insbesondere über die geometrische Bedeutung der imaginären Zahlen“ gehören, ist zwar aus Grassmann's Anführungen nicht ersichtlich, muss aber für möglich gehalten, wenigstens, wo es sich um Prioritätsrechte handelt, vorausgesetzt werden. Immerhin enthält die Ausdehnungslehre hinsichtlich des Imaginären durchaus nichts Neues; sie ist eine auf Symbolisirung gewisser räumlichen Anschauungen beruhende Rechnung. Die Symbole und Definitionen beruhen übrigens nicht auf einer inneren Nothwendigkeit, sie bilden kein natürliches, in sich abgeschlossenes Grundsystem, sondern sind nach freiem Belieben zu bestimmten Operationszwecken gewählt. Alle Definitionen sind Worterklärungen: es findet sich darunter nicht eine einzige Begriffserklärung (wohl aber hinundwieder ungehörigerweise ein Lehrsatz, wie unter Nr. 16 und 18), noch weniger aber die Explikation einer Grundeigenschaft, einer Grundoperation, eines Grundsatzes. Jede Symbolik, so willkürlich die Auswahl ihrer Elemente getroffen sein mag, führt durch die arithmetische Behandlung mittelst Formeln zu Resultaten, welche die Analogien zu gewissen geometrischen Figuren darstellen, weil die arithmetische Rechnung nichts Anderes ist, als das abstrakte Denken der im Raume durch geometrische Prozesse sich vollziehenden anschaulichen Gesetze. Man kann also jede symbolische Rechnung auf räumliche Prozesse beziehen und, jenachdem die Symbolik mehr oder weniger zweckmässig angeordnet ist, wird sich das Verfahren mehr oder weniger empfehlenswerth erweisen. So hat auch das Verfahren von Grassmann interessante Seiten und gestattet nützliche Anwendungen; eine Abstraktion der anschaulichen Grundgesetze ist es jedoch nicht, und die Theorie des Imaginären ist dadurch nicht gefördert.

In jüngster Zeit hat Riemann die imaginären Zahlen zum Gegenstande seines Studiums gemacht. Die bekannte Inauguraldissertation „Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Funktionen einer veränderlichen komplexen Grösse“, welche die erste Abhandlung seiner von Weber gesammelten mathematischen Werke bildet, enthält jedoch, wie ich bereits in §. 539 der Naturgesetze näher gezeigt habe, lediglich die Ausführung eines ganz einfachen auf die Geometrie der Ebene bezüglichen Satzes, welcher nach dem Situationskalkul sofort in die Augen springt. Die Riemannsche Funktion ist nämlich nichts Anderes, als das Produkt einer konstanten Grösse mit einer einfach variabelen komplexen Grösse. Wenn $z = re^{\phi\sqrt{-1}}$ ein Vektor in der Grundebene von variabeler Länge r und Richtung φ, ferner $ae^{\alpha\sqrt{-1}}$ ein Faktor von konstanter Quantität a und konstanter Richtung α ist; so stellt das Produkt w Beider in der Form

$$w = ae^{\alpha\sqrt{-1}} \times re^{\phi\sqrt{-1}} = are^{(\alpha+\phi)\sqrt{-1}}$$

nach dem Situationskalkul den um den Winkel α in der Grundebene gedrehten und in dem Verhältnisse a vergrösserten Vektor z und die Riemannsche Funktion dar. Da

$$dz = dre^{\phi\sqrt{-1}} + rd\varphi\sqrt{-1}e^{\phi\sqrt{-1}}$$

und

$$dw = adre^{(\alpha+\phi)\sqrt{-1}} + ard\varphi\sqrt{-1}e^{(\alpha+\phi)\sqrt{-1}}$$

ist; so hat man

$$\frac{dw}{dz} = ae^{\alpha\sqrt{-1}}$$

Der Differentialquotient $\frac{dw}{dz}$ dieser einförmigen Funktion ist also, wie Das nach den Prinzipien des Situationskalkuls auf den ersten Blick zu beurtheilen war, konstant oder von dz unabhängig. Ausserdem ist klar, dass die Grösse z, wenn sie zwischen irgend welchen bestimmten Grenzen von r und φ genommen wird, alle Punkte einer bestimmten Figur der Grundebene darstellt und dass w eine dieser Figur geometrische Figur in derselben Grundebene oder eine Abbildung der Figur z sein muss. Diese Zeilen enthalten die Resultate der Nr. 1, 2, 3 der Abhandlung von Riemann.

Mit diesen Sätzen hat nun Riemann in Nr. 7 eine Formel kombinirt, welche mit der Theorie des Komplexen in keiner Beziehung steht, sondern, wie ich in §. 539 der „Naturgesetze“ gezeigt habe, eine generelle Transformationsformel für Integrale ist. Durch diese Kombination werden die Grundprinzipien nicht erweitert. Ebenso wenig durch die Vorstellung, dass sich über allen Punkten der ebenen Figur w normale Koordinaten erheben, welche einen Körper bilden, der sich auf jene Figur projizirt. Es würde eine grosse Täuschung sein, zu glauben, dass hierdurch die allgemeinen Verhältnisse des Raumes zur abstrakten Erkenntniss gekommen seien. Ganz wie die analytische Geometrie Abstraktion mit Anschauung vermischt und zwischen den Gebieten des arithmetischen Denkens und des geometrischen Konstruirens hinundher geht, ebenso geschieht es in der Riemannschen Abhandlung; der rechnende Theil ist nur insofern allgemeiner, als in der analytischen Geometrie, als er sich nicht auf Operationen in gerader Linie beschränkt, sondern auf Operationen in der Ebene erweitert: in den Raum aber tritt er nicht ein.

Riemann verfolgt in dieser Abhandlung einen zweiten Zweck: den der Verallgemeinerung der Theorie der Funktionen. Diesen Zweck halte ich für ganz verfehlt: denn, abgesehen von den nicht sehr wesentlichen, in mancher Hinsicht sogar unrichtigen Sätzen über die Stetigkeit, verkennt Riemann meines Erachtens das Wesen der Funktion, wie es allgemein verkannt wird; er sucht das Charakteristische des Abhängigkeitsgesetzes theils in der Stetigkeit, theils in der Komplexität, theils in anderen, dem Gebiete der eigentlichen Modalität oder Gesetzlichkeit nicht unmittelbar angehörigen Eigenschaften. Wenn derselbe am Schlusse von Nr. 1 seiner Dissertation sagte, „eine veränderliche komplexe Grösse w nenne ich eine Riemannsche Funktion einer veränderlichen komplexen Grösse z, wenn

sie mit ihr sich so ändert, dass der Werth des Differentialquotienten $\frac{dw}{dz}$ unabhängig von dem Werthe des Differentials dz ist"; so liesse sich gegen diese Benennung und die weitere Diskussion einer solchen Funktion durchaus Nichts erinnern: indem Riemann jedoch jene Abhängigkeit als das generelle Wesen einer Funktion hinstellt, ruft er einen erheblichen Irrthum hervor: denn die Abhandlung, welche eine Generalisirung des Begriffes der Funktion sein soll, bewirkt das Gegentheil davon, nämlich eine Spezialisirung, ohne doch das Merkmal der Spezialität und der Generalität irgendwie erkennbar zu machen. Im Übrigen beziehe ich mich auf die über diesen Punkt in §. 539 der „Naturgesetze" gemachten Bemerkungen.

Aus Vorstehendem dürfte hervorgehen, dass keine der besprochenen Theorien die arithmetische Abstraktion über das der geometrischen Ebene analoge Begriffsgebiet hinausgehoben hat. Die Aufgabe der Arithmetik besteht aber nicht darin, sich mit geometrischer oder chronologischer oder mechanischer oder chemilogischer oder physiometrischer Anschauung zu kombiniren, den Anschauungswissenschaften einen Hülfsdienst zu leisten, Schwierigkeiten der anschaulichen Konstruktion durch schematisirte Rechenmethoden zu heben: die Arithmetik hat vielmehr die Aufgabe, als logische Mathematik die Gesetze der anschaulichen Welt in reinen Begriffen zu denken.

Prinzipiell sind ihr alle Surrogate der Anschauung fremd; die Arithmetik kennt keinen Raum, keine geometrische Figur, kein Polygon, keine Kurve, keine Tangente, ebensowenig wie eine Dauer, eine Kraft, eine Masse u. s. w., sondern nur allgemeine Begriffe, welche alle jene Anschauungen als Spezialitäten involviren. Die Zuhülfenahme von Anschauungen, namentlich von geometrischen, wie es z. B. bei der Theorie der Gleichungen, in der analytischen Geometrie, in der Differential- und Integralrechnung, in der Zahlentheorie u. s. w. geschieht, kann nur als praktisches Lehrmittel zur Erleichterung der Deduktion, sowie auch zur Kontrole der Rechnungsoperation und zur Belebung der Phantasie angesehen werden; im Übrigen hat die Arithmetik ihre Aufgabe ganz selbstständig zu lösen. Zu diesem Zwecke muss sie sich nothwendig über die Grundeigenschaften und Prinzipien klar werden. Wenn sie unter der Leitung der allgemeinen Logik hierzu gelangt, wird sie aber auch finden, dass die Grundlagen in jedem Grössengebiete, mag es ein physisches, mag es ein anschauliches, mag es ein abstraktes sein, einunddasselbe System bilden, welches sich in unserem Kardinalprinzipe ausprägt, weil dasselbe das Wesen des menschlichen Geistes ausmacht. Aus diesem Grunde kann das Kardinalprinzip aber ebensogut aus dem einen, wie aus dem anderen Grössengebiete abstrahirt werden, wenn die Analogien richtig erfasst werden. Das Gebiet des Raumes liefert es so gut wie das der Zeit oder das der Materie, und jedes derselben erzeugt kein anderes

Grundsystem wie das Gebiet der Zahl und dieses kein anderes wie das Gebiet des reinen Begriffes.

Hiernach ist es ganz entschieden unzulässig, das Gebiet des Raumes wie etwas dem Geiste Fremdes, wie etwas ausser ihm Liegendes, erst durch Erfahrung Erschlossenes zu betrachten, welches seine eigenen, selbstständigen Grundprinzipien hat, oder wie etwas Gemachtes, vom Geiste Erdachtes, welches auf Hypothesen und Voraussetzungen beruht, die sich nach Belieben bilden und deuten lassen. Es scheint, dass manche Mathematiker solchen Ansichten huldigen; jedenfalls belehren mich verschiedene Abhandlungen über diesen Gegenstand, namentlich die von Riemann „Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen“ (Abhandlung XIII seiner gesammelten Werke), dass über die Grundeigenschaften und Grundgesetze des Raumes die grössten Unsicherheiten und Irrthümer herrschen. Riemann sieht den Raum nur als einen besonderen Fall einer dreifach ausgedehnten Grösse an — während doch der Raum das einzige und ausschliessliche Gebiet alles Ausgedehnten ist. Eine nothwendige Folge hiervon soll sein, dass die Sätze der Geometrie sich nicht aus allgemeinen Grössenbegriffen ableiten lassen — während doch das Anschauliche ein konkreter Fall des Begrifflichen und das Begriffliche eine Abstraktion des Anschaulichen ist und ein Jedes dasselbe System von Grundeigenschaften enthält. Diejenigen Eigenschaften, durch welche sich der Raum von anderen denkbaren dreifach ausgedehnten Grössen unterscheidet, sollen nur aus der Erfahrung entnommen werden können — während doch andere Ausdehnungen als räumliche absolut undenkbar sind, auch mittelst der Erfahrung keine Grundeigenschaften zugänglich werden können, welche dem Geiste nicht schon von vorn herein vermöge seines eigenen Wesens zugänglich sind. Hieraus soll die Aufgabe entstehen, die einfachsten Thatsachen aufzusuchen, aus denen sich die Maassverhältnisse des Raumes bestimmen lassen — während doch Thatsachen unmöglich Grundsätze und Prinzipien ersetzen können. Diese Aufgabe soll der Natur der Sache nach nicht völlig bestimmt sein, da sich mehrere Systeme einfacher Thatsachen angeben lassen, welche Dasselbe leisten — während sich doch das eigentliche Grundsystem der Grundeigenschaften und Prinzipien als absolut einzig und bestimmt erweis't. Das von Euklid zu Grunde gelegte System von Thatsachen wird wie jedes andere für nicht nothwendig gehalten, es wird jedem derartigen System nur eine empirische Gewissheit beigelegt, sie werden sämmtlich für Hypothesen erklärt, welche nur Wahrscheinlichkeit für sich haben, eine Wahrscheinlichkeit, die durch Beobachtung zu untersuchen und über deren Zulässigkeit jenseit der Grenzen der Beobachtung sowohl nach der Seite des unmessbar Grossen, als nach der Seite des unmessbar Kleinen erst auf Grund solcher Beobachtungsresultate zu urtheilen sei — während doch keine Beobachtung im Stande ist, uns die Überzeugung von der unbedingten Gewissheit und Unantastbarkeit eines geometrischen Beweises, von der Evidenz eines geometrischen Grundsatzes, von der un-

zweifelhaften Zulänglichkeit einer geometrischen Konstruktion, von der sicheren Lösung einer geometrischen Aufgabe zu verschaffen.

Wie ist es überhaupt möglich, bei den Prinzipien einer Wissenschaft, mag sie sein, welche sie wolle, von Wahrscheinlichkeit zu reden! Wenn ein Geodät die wahrscheinliche Grösse eines gemessenen Stück Landes bestimmt; so denkt er dabei doch nicht, dass die wirkliche Grösse desselben ein ungewisses Ding sei, sondern nur, dass sein grobes Messungsverfahren ihm nicht hinreichende Mittel zur sicheren Erkenntniss jener Grösse gewähre, dass er sich also aus Mangel an genauen Bestimmungsstücken mit einem Näherungswerthe begnügen müsse. Wenn er erst glauben soll, dass die geometrischen Sätze, welche er in Anwendung bringt, nicht absolut gewiss seien, würde ja selbst der mathematische Begriff der Wahrscheinlichkeit zur Absurdität werden und sein Messungsresultat würde auch nicht einmal einen wahrscheinlichen Werth behalten. Wie kann man überhaupt wagen zu denken, zu urtheilen, zu schliessen, wenn die Grundlagen der geometrischen Anschauung für Hypothesen erklärt werden, welche nur mit einem Annäherungsgrade von Zuverlässigkeit bestehen: mit demselben Grunde müsste man doch annehmen, dass auch die Grundlagen des Verstandes Hypothesen seien und alle Urtheile und Schlüsse nur Wahrscheinlichkeit, nicht Gewissheit haben!

Da sich das unendlich Kleine überall nicht beobachten lässt; so würde nach Riemann's Ansicht die Differential- und Integralrechnung, wenigstens in ihrer Anwendung auf Geometrie und Mechanik, ein leeres Puppenspiel sein.

Der eigentliche Zweck der in Rede stehenden Abhandlung ist die Definition der Dimension und der Versuch, die Anzahl der Dimensionen als eine beliebig zu vermehrende Grösse darzustellen. Ich finde aber nicht, dass die Worte in Nr. 2 der Abhandlung eine sachliche Definition der Dimension enthalten, sondern nur, dass sie äusserst unklare Worte sind, mit denen alles mögliche Andere als das Wesen der Dimension definirt werden kann; dieselben lauten: „Geht man bei einem Begriffe, dessen Bestimmungsweisen eine stetige Mannichfaltigkeit bilden, von einer Bestimmungsweise auf eine bestimmte Art zu einer anderen über; so bilden die durchlaufenen Bestimmungsweisen eine einfach ausgedehnte Mannichfaltigkeit (oder Dimension), deren wesentliches Kennzeichen ist, dass in ihr von einem Punkte nur nach zwei Seiten, vorwärts oder rückwärts, ein stetiger Fortgang möglich ist.“ Man fragt zunächst, was bedeutet hier das Wort Begriff, da es sich doch um räumliche Anschauungen handelt, was ist unter der Bestimmungsweise, was unter einer stetigen Mannichfaltigkeit, was unter einem Übergange auf bestimmte Art, was unter einem Punkte (des fraglichen Begriffes) zu verstehen? Wenn man aber von dieser Nebelhaftigkeit absieht, ist dann nach dieser Definition nicht Alles, was Gott erschaffen hat, eine Dimension; ist dann nicht jeder bestimmte stetige Fortschritt, z. B. der Fortgang durch die Farben des Spektrums, die Drehung eines Radius im Kreise, der Fortschritt durch die

stetige Zahlenreihe, der Durchgang durch eine Produktentafel, der Fortgang durch eine stetige Reihe von Quadraten, Kuben, n-ten Potenzen u. s. w. eine einfache Dimensionirung? Jedenfalls ist Diess nicht gemeint, aber was sonst?

Die Abhandlung hält sich in der Form einer mathematischen Demonstration; sie behandelt den Gegenstand ganz und gar wie einen mathematisch beweisbaren Lehrsatz. Dieselbe verliert aber die Beweiskraft nicht allein durch die Willkürlichkeit der Begriffe und die Irrthümlichkeit der Behauptungen, sondern auch dadurch, dass sie richtige Sätze, welche eines selbstständigen Beweises bedürfen würden, ohne Beweis in die Demonstration verflicht. Diess ist in der eben zitirten Definition der Satz, dass in einer einfachen Dimension nur ein Fortgang nach zwei Seiten, vorwärts oder rückwärts, möglich sei. Der Fortschritt hat mit der Dimensionirung prinzipiell Nichts zu schaffen, die Dimension beruht überall nicht auf Fortschritt, sondern auf Gemeinschaft des Seins: aber, ganz abgesehen von dieser aus der Unklarheit der Prinzipien entspringenden Vermischung, so ist die Zweistufigkeit der Kontrarietät, welche nur den einen Gegensatz von Fortschritt und Rückschritt zulässt, ein ebenso selbstständiges Stück im Systeme der Grundeigenschaften wie die Dreiheit der Neutralitätsstufen oder der drei rechtwinkligen Richtungen im Raume, welche auch von Riemann fälschlich mit den Dimensionen oder Heterogenitätsstufen verwechselt werden, und hätte in einer Abhandlung, welche das System der Dimensionen demonstriren will, vor allem Anderen demonstrirt werden müssen. Der Mathematiker weiss aber, dass ein Beweis, welcher sich auf unerwiesene Sätze stützt, kein Beweis ist.

Die übrigen Theile der Abhandlung, welche ich für ebenso verwirrend wie unrichtig halte, übergehe ich hier, um weiter unten in Nr. 19 darauf zurückzukommen.

Riemann hat auch versucht, Gegenstände aus der Psychologie, Metaphysik, Erkenntnisstheorie und Naturphilosophie demonstrativ zu behandeln (vergl. den Anhang seiner Werke). Der Inhalt dieser Abhandlungen hat für mich nur das Interesse, die Gefahr zu erkennen, in welcher ein nach Erkenntniss ringender Geist schwebt, wenn er sich mit den Hülfsmitteln, welche die heutige Wissenschaft darbietet, auf das Meer der allgemeinen Abstraktionen hinauswagt. Oder giebt es auch in der Wissenschaft einen Aberglauben, der den dafür Empfänglichen mit logischer Gewalt in seinen Zauberkreis bannt, während er den Unempfänglichen zurückstösst? Die Ueberzeugung habe ich aus Riemann's Schriften gewonnen, dass die Prinzipien der physischen, der mathematischen und der logischen Erkenntniss, überhaupt die Prinzipien der Wissenschaft ein jetzt nur erst sporadisch angebautes Feld sind, und dass daher mein Buch über die Naturgesetze, wenn es wirklich auch nur ein mangelhafter Versuch sein sollte, doch immer, als ein Versuch zur Errichtung einiger Leuchtthürme an einem unerforschten Meere und einiger Kultur-

stationen auf einem unbebauten Felde, Demjenigen einigen Nutzen gewähren kann, welcher sich seiner Führung anvertraut. Es handelt sich darin um das System der Grundeigenschaften, der Grundprozesse und der Grundoperationen, ferner um das der Grundprinzipien, dann um das der Grundsätze und um das der Grundpostulate, endlich um das der Apobasen. Das Resultat, dass dieses Gesammtsystem für alle Erkenntnissgebiete in seinem Grundwesen einunddasselbe ist, stärkt die Überzeugung von der Richtigkeit desselben in höchstem Grade. Von einer mathematischen Demonstration der Grundsätze, welche die Grundlagen alles Beweisverfahrens, also selbst unbeweisbar sind, und von einer erschöpfenden Definition der Grundeigenschaften, welche die Grundlagen aller Erklärungen, also selbst unerklärbar sind, kann selbstverständlich keine Rede sein. Mein Buch entbehrt daher in den Prinzipienfragen des für die Entwicklung aus gegebenen Grössen vermittelst bekannter Grundsätze durchaus erforderlichen strengen oder mathematischen Beweisverfahrens, welches hier einem generelleren logischen und induktiven Verfahren weichen muss: der in die Sache Eindringende wird aber auch bald die Überzeugung gewinnen, dass es sich in jenen Fragen nur um die Lüftung eines Schleiers handeln kann, hinter welchem dann ein Jeder durch die Kraft seiner eigenen gesunden Vernunft die Wahrheit erkennt.

Die vorstehende Einleitung sollte zeigen, dass durch die darin besprochenen Schriften die arithmetische Erkenntniss nicht über das Gebiet der komplexen Zahlen hinaus gefördert ist, dass die vielfachen Bestrebungen jedoch das allgemeine Bewusstsein von einer nothwendig zu überspringenden Schranke bekunden und dass der Mensch sich durch die natürliche Entwicklung der mathematischen Grundprozesse selbst vor diese Schranke gestellt hat. Die Durchbrechung derselben ist nur darum schwieriger, als der frühere Übergang vom Positiven zum Negativen und dann vom Reellen zum Imaginären, weil der Blick bei der Einführung des Minuszeichens als Ausdruck der Kontrarietät noch nicht frei genug war, um sogleich ein Zeichen für das Neutralitätsverhältniss zu schaffen. Hierzu gehörte die Erkenntniss des Kardinalprinzipes und der Grundprinzipien, insbesondere des Systems der Grund-, Kardinal- und Hauptstufen. Durch den „Situationskalkul“ und die demselben vorhergehende Schrift „über das Verhältniss der Arithmetik zur Geometrie“ glaube ich das Hinderniss, welches dem Eindringen der Abstraktion in den dreidimensionalen Raum entgegen stand, vermittelst des Kominuszeichens $\div 1$, welches ebenfalls einen Gegensatz, aber in einer zur Drehungsrichtung neutralen Wälzungsrichtung darstellt und demnach das zum Reellen $+1$ und zum Imaginären $\sqrt{-1}$ neutral sich verhaltende Überimaginäre $\sqrt{-1}\ \sqrt{\div 1}$ erzeugt, beseitigt zu haben. Die „Naturgesetze“ aber haben den Zweck, radikale Abhülfe zu schaffen und die Grundprinzipien generell und nach allen Seiten zu entwickeln.

Im Nachstehenden beabsichtige ich, die Grundoperationen nach den in §. 497 der Naturgesetze gemachten Andeutungen in einigen Punkten

näher auszuführen und zunächst auf die Theorie der Primzahlen anzuwenden.

§. 3.

Primäre, sekundäre und tertiäre Addition.

Die erste Grundoperation ist die Numeration oder Zählung. Sie ist die Operation der Vereinigung oder der Zusammenfassung in einer gemeinsamen Grenze, welche sich auf den Grundprozess der Erweiterung stützt. Was sie zusammenfasst (die Numeranden) und was sie durch Zusammenfassung bildet (die Numerate) sind Vielheiten oder Quantitäten, keine Glieder oder Reihen. Die Numeration, indem sie vereinigt, unterscheidet nur die Vielheit des zu Vereinigenden, nicht die Reihenfolge desselben; sie kennt kein erstes und kein letztes Stück, keinen Anfang und kein Ende, sondern nur eine in gemeinsamer Grenze vereinigte Menge.

Die zweite Grundoperation ist die Addition. Sie ist die Operation der Anreihung, welche sich auf den Grundprozess des Fortschritts stützt. Sie vereinigt nicht, sondern sie verbindet. Was sie verbindet oder aneinanderreiht (die Summanden) und was sie durch Anreihung bildet (die Summen oder eigentlich die Aggregate) sind Glieder oder Reihen, deren wesentliches Merkmal ein Anfang und ein Ende ist, welches Letztere durch den Fortschritt vom Anfange her erzeugt wird.

Die direkte oder positive Addition $a + b$ verlangt die Anreihung des Addends b an den Augend a dergestalt, dass sich der Anfang von b mit dem Ende von a verbindet. Die indirekte oder negative Addition $a - b$, welche Subtraktion heisst, verlangt die Anreihung des Subtrahends b an den Minuend a dergestalt, dass sich das Ende von b mit dem Ende von a verbindet. Der Effekt der Subtraktion ist derselbe wie der Rückschritt vom Ende des Minuends um den Weg b: daher kann die Subtraktion einer positiven Grösse b wie die Addition einer negativen Grösse $-b$ aufgefasst oder $a - b = a + (-b)$ geschrieben werden. Gleichwohl ist der Sinn der letzteren Operation ein ganz anderer; denn die Addition der Grösse $-b$ fordert immer Verbindung des Anfanges von $-b$ mit dem Ende von a. Ebenso kann man die Addition einer positiven Grösse wie die Subtraktion einer negativen Grösse ansehen oder $a + b = a - (-b)$ setzen. Der letzte Ausdruck hat jedoch einen anderen Sinn, als der erste, indem er die Verbindung des Endes von $-b$ mit dem Ende von a verlangt.

Für die Ausführung der Addition ist also die Kenntniss des Anfanges und des Endes der Summanden ganz unerlässlich (während dieselbe für die Numeration gleichgültig ist). Diese Kenntniss ist nur für einreihige Grössen, deren geometrische Repräsentanten die Linien sind, unzweifelhaft, da die einreihigen Grössen punktuelle oder ungereihte,

absolut einfache Grenzen oder Grenzpunkte haben. Jede Linie besitzt einen ganz festen und einfachen Anfangspunkt und einen ganz festen und einfachen Endpunkt, innerhalb dessen wegen seiner Ausdehnungslosigkeit keine Variation der Bewegung möglich ist. Bei mehrreihigen Grössen, z. B. bei den zweireihigen Flächengrössen, ist Diess anders; ihre Grenzen sind einreihige Grössen oder Linienfiguren, von welchen jede beliebige Strecke als der Anfang und jede andere beliebige Strecke als das Ende des zweiseitigen Fortschrittes, welcher eine Fläche erzeugt, angenommen werden kann. Demnach ist die Addition von Flächen so lange eine unbestimmte Operation, als an den Summanden nicht ein Anfang und ein Ende bezeichnet ist. Die Summe zweier Dreiecksflächen kann die verschiedenste Figur bilden, jenachdem man dieselben so oder so aneinander legt: wenn aber an dem einen eine bestimmte Strecke des Umfanges als das Ende und an dem anderen eine gleich lange und parallele Umfangsstrecke als der damit zu verbindende Anfang bezeichnet wird, ist die Summe eine einzige bestimmte Figur. Wir behandeln im Nachfolgenden zunächst die Addition der einreihigen Grössen oder der Linien.

Primäre Addition nennen wir die Anreihung der Grössen durch Verbindung ihrer primären Grenzen, also, wenn es sich um einreihige Grössen oder Linien handelt, die Anreihung der Linien durch Verbindung ihrer Längengrenzen oder ihrer Endpunkte: es ist die bis jetzt allgemein unter Addition verstandene Operation.

Die Summanden der primären Addition können reell, imaginär und überimaginär sein. Die Summe eines reellen, eines imaginären und eines überimaginären Gliedes ist die triplexe Grösse

$$a + b\sqrt{-1} + c\sqrt{-1}\sqrt{\div 1}$$

Das zwischen dem Anfangs- und Endpunkte der triplexen Grösse liegende Numerat hat die Quantität oder Länge

$$r = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

welche die Quadratwurzel der Norm der triplexen Zahl ist. Bezeichnet φ die Deklination und ψ die Inklination des Vektors r; so hat man

$$(r) = re^{\varphi\sqrt{-1}}\, e^{\psi\sqrt{\div 1}} = a + b\sqrt{-1} + c\sqrt{-1}\sqrt{\div 1}$$

Mehrere beliebige Zahlen $(r_1), (r_2), (r_3) \ldots$ addiren sich einfach nach der Formel

$$(r) = (r_1) + (r_2) + (r_3)$$
$$= (a_1 + a_2 + a_3) + (b_1 + b_2 + b_3)\sqrt{-1} + (c_1 + c_2 + c_3)\sqrt{-1}\sqrt{\div 1}$$

und die Summe (r) stellt den vom Anfangs- nach dem Endpunkte des Polygons $(r_1) + (r_2) + (r_3)$ gezogenen Vektor dar.

Eine Linie ist eine Längengrösse von endlicher Länge: sie ist aber auch eine Breitengrösse von unendlich geringer Breite oder vielmehr das

Element einer Fläche, welches endliche Länge, aber elementare Breite hat. Als Flächenelement hat die Linie Seitengrenzen. Wird die in der Grundaxe OX liegende Linie a als Element der Grundebene XY angesehen; so sind ihre Seitengrenzen zwei in der Ebene XY liegende, mit der Grundaxe OX parallel laufende, unmittelbar aneinander liegende, also mit der Linie a zusammenfallende Linien.

Unter sekundärer Addition verstehen wir die Anreihung der Grössen durch Verbindung ihrer sekundären Grenzen oder, wenn es sich um Linien handelt, durch Verbindung ihrer Breitengrenzen. Das Operationszeichen der sekundären Addition ist das koplus, welches wir im Situationskalkul mit $\dot{+}$ bezeichnet haben, jetzt aber einfacher durch ein gewöhnliches plus mit darüber gesetztem Punkte, also in der Form $\dot{+}$ darstellen. Das Zeichen der sekundären Subtraktion ist das kominus $\dot{-}$, wofür man, wenn man will, einfacher $\dot{-}$ schreiben kann.

Durch sekundäre Addition werden zwei reelle Linien von gleicher Länge a nicht vor einander, sondern seitlich nebeneinander gelagert, wodurch eine Linie von der Länge a, aber von zweifacher elementarer Breite (Fig. 3) entsteht, welche auch wie eine zweifache oder wie eine

Fig. 3.

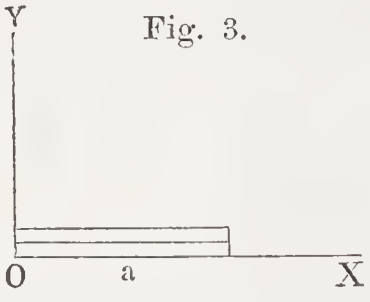


Fig. 4.

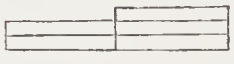
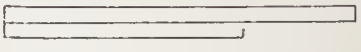


Fig. 5.



verdichtete Linie von der Dichte 2 angesehen werden kann. Die Summe $a \dot{+} a$ stellt also eine zweifache, die Summe $a \dot{+} a \dot{+} a$ eine dreifache Linie von der Länge a in der reellen Axe OX und mit dem Anfangspunkte O dar. Erst unendlich viel sekundär addirte Linien a würden dem Resultate eine endliche Breite b geben und eine Fläche von der Länge a und der Breite b erzeugen: eine endliche Zahl von sekundären Summanden liefert stets eine Linie von unendlich geringer, wiewohl mit der Zahl der Summanden wachsenden Dichte oder elementarer Breite.

Man fühlt bald das Bedürfniss, die Zahlen, welche eine Dichte messen, von den Zahlen, welche eine Länge messen, zu unterscheiden. Die letzteren sind die primären Vielheiten, welche durch die gewöhnlichen Zahlzeichen oder Buchstaben dargestellt werden: die ersteren nennen wir die sekundären Vielheiten und bezeichnen sie durch die gewöhnlichen Zahlzeichen, indem wir dieselben oben oder unten, wie es die Form des Zahlzeichens mit Rücksicht auf kompendiöse Schreibweise der Formeln eben zweckmässig erscheinen lässt, durch einen Punkt markiren. Demnach bedeuten

$$\dot{1},\ \dot{2},\ \dot{3},\ \dot{a},\ \dot{b},\ \dot{c},\ \dot{d},\ \dot{e},\ \dot{f},\ \dot{g},\ \dot{h},\ \dot{i}$$

$$\dot{A},\ \dot{G},\ \frac{\dot{2}}{\dot{3}},\ \dot{\overline{125}},\ \dot{\overline{\sin\alpha}},\ \dot{\overline{\log x}},\ \dot{F}(x),\ [\dot{M}]\ \text{u. s. w.}$$

sekundäre Zahlen, welche sämmtlich die Länge der Einheit 1, also einfache Länge, aber diejenige Dichte haben, welche ihr absoluter Zahlwerth angiebt.

Fassen wir zunächst die einfachsten Grundoperationen mit primären und sekundären absoluten Vielheiten ins Auge; so ergeben sich leicht die Formeln

$$2 + 3 = 5 \qquad \dot{2} \dot{+} \dot{3} = \dot{5}$$
$$2.3 = 6 \qquad \dot{2}.\dot{3} = \dot{3} \dot{+} \dot{3} = \dot{2} \dot{+} \dot{2} \dot{+} \dot{2} = \dot{6}$$

Die primäre Summe zweier sekundären Zahlen $\dot{2} \dot{+} \dot{3}$, welche nach Fig. 4 eine Länge von 2 Einheiten darstellt, deren erste Hälfte die Dichte 2 und deren zweite Hälfte die Dichte 3 hat, sowie die sekundäre Summe zweier primären Zahlen $2 \dot{+} 3$, welche nach Fig. 5 zwei Längen von einfacher Dichte, jedoch von resp. 2 und 3 Einheiten Länge darstellt, kann nicht weiter vereinfacht werden. Ihr Inhalt ist übrigens wie der von $2 + 3$ gleich 5 Einheiten.

Das Produkt $a.b$ hat die Länge von ab Einheiten, das Produkt $\dot{a}.\dot{b}$ hat die Länge einer Einheit und die Dichte ab. Das Produkt $a.\dot{b}$ hat die Länge von a Einheiten und die Dichte b. Das Produkt $\dot{a}.b$ hat die Länge von b Einheiten und die Dichte a. Die vier Produkte ab, $\dot{a}\dot{b}$, $a\dot{b}$, $\dot{a}b$ haben also sämmtlich den Inhalt von ab Einheiten, jedoch verschiedene Länge und verschiedene Dichte. Von der Zahl $a.\dot{b} = \dot{b}.a$ kann man sagen, sie habe a-fache Länge und b-fache Breite. Die primäre Einheit 1 deckt die sekundäre Einheit $\dot{1}$. Jede primäre Zahl a kann daher als das Produkt der primären Zahl a und der sekundären Einheit $\dot{1}$, also gleich $a\dot{1}$, jede sekundäre Zahl $\dot{a}$ aber als das Produkt der sekundären Zahl $\dot{a}$ und der primären Einheit 1, also gleich $\dot{a}\,1$ gesetzt werden. Ausserdem ist $a = a\,1$ und $\dot{a} = \dot{a}\,\dot{1}$. Man kann auch $a = a\,1\,\dot{1}$ und $\dot{a} = \dot{a}\,1\,\dot{1}$ setzen.

Offenbar sind sekundäre Summanden und Faktoren vertauschbar; man hat

$$a \dot{+} b = b \dot{+} a \qquad \dot{a} \dot{+} \dot{b} = \dot{b} \dot{+} \dot{a}$$
$$\dot{a} \dot{+} b = b \dot{+} \dot{a}$$
$$a\dot{b} = \dot{b}a \qquad \dot{a}\dot{b} = \dot{b}\dot{a}$$

Additive und multiplikative Klammerausdrücke, welche lauter sekundäre Zahlen und sekundäre Verbindungen enthalten, lösen sich wie gewöhnliche Klammern auf: man hat

$$(\dot{a} \dot{+} \dot{b}) \dot{+} (\dot{c} \dot{+} \dot{d}) = \dot{a} \dot{+} \dot{b} \dot{+} \dot{c} \dot{+} \dot{d}$$
$$(\dot{a} \dot{+} \dot{b})\, \dot{c} = \dot{a}\dot{c} \dot{+} \dot{b}\dot{c}$$
$$(\dot{a} \dot{+} \dot{b})(\dot{c} \dot{+} \dot{d}) = \dot{a}\dot{c} \dot{+} \dot{a}\dot{d} \dot{+} \dot{b}\dot{c} \dot{+} \dot{b}\dot{d}$$

Die sekundären Zahlen können in diesen Formeln auch durch primäre ersetzt werden, falls alle Additionen sekundäre bleiben: man hat

$$(a \dot{+} b) \dot{+} (c \dot{+} d) = a \dot{+} b \dot{+} c \dot{+} d$$
$$(a \dot{+} b)\, c = a\, c \dot{+} b\, c$$
$$(a \dot{+} b)(c \dot{+} d) = a\, c \dot{+} a\, d \dot{+} b\, c \dot{+} b\, d$$

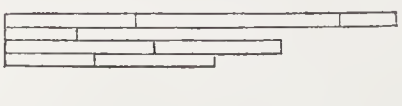
Sobald primäre und sekundäre Additionen sich vermischen, erfordert die Bestimmtheit des Resultates eine genaue Festsetzung und Innehaltung der Reihenfolge der Glieder, welche unmittelbar miteinander verbunden werden sollen. Eine Änderung dieser Reihenfolge ändert zwar nicht die Gesammtzahl der in einem Ausdrucke enthaltenen Einheiten, welche wir dessen Inhalt nennen werden, wohl aber die Anordnung derselben und demnach die Entfernungen der äussersten Endpunkte und die Strecken mit den äussersten Dichtigkeiten. Man muss überhaupt bei allen mathematischen Operationen beachten, dass jede Änderung eines Ausdruckes, mag sie sein, welche sie wolle, stets eine Änderung der Bedeutung desselben involvirt, dass also der geänderte Ausdruck niemals mit dem früheren identisch ist. Wenn eine Änderung den Anfang und das Ende eines Ausdruckes ungeändert lässt, heissen beide Ausdrücke einander gleich, wiewohl sie nicht identisch sind oder sich nicht decken. So ist z. B. $a + b$ gleich $b + a$, stellt aber dessenungeachtet eine andere Figur dar. Bei der Kombination von primären und sekundären Operationen kann nur eine Vertauschung der Glieder und Faktoren unter Umständen die Endpunkte ändern, also die Gleichheit der Ausdrücke gefährden: insofern man jedoch von der Deckung der Anfangs- und Endpunkte abstrahirt und nur Deckung der Inhalte verlangt, wie es auch bei dem gewöhnlichen Produkte zweier Linien in der Formel $a\,b = b\,a$ geschieht, wird die Gleichheit durch die Vertauschung nicht beeinträchtigt.

Beispielsweise sind in der Formel

$$(a + b) \dot{+} (c + d) \dot{+} e \dot{+} (f + g + h)$$

drei primäre Glieder $a + b$, $c + d$, e, $f + g + h$ von verschiedener Länge so nebeneinander gelegt, dass der Anfangspunkt eines jeden im Nullpunkte liegt (Fig. 6). Es lassen sich wohl diese Glieder miteinander vertauschen, nicht aber die Klammern auflösen, weil hierdurch eine veränderte und unbestimmte Anreihung in der Länge entstehen würde. Hätte man einfach $(a + b) \dot{+} e$; so würde die Auflösung der Klammern $a + b \dot{+} e$ ergeben, welche Formel so verstanden werden kann, dass sie $a + (b \dot{+} e)$ bedeutet, also erst die sekundäre Anlagerung

Fig. 6.



von b und e und sodann die Längenanreihung von a darstellt, was eine ganz andere Erstreckung ergiebt.

Die kombinirten primären und sekundären Summen stellen im Allgemeinen Linien mit mehreren Anfangs- und mehreren Endpunkten dar. Fig. 6 ist das Bild einer Linie mit einem Anfangspunkte und vier Endpunkten. Fig. 7 stellt die Linie $a + (b \dot{+} c)$ mit zwei

Fig. 7.

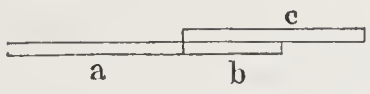
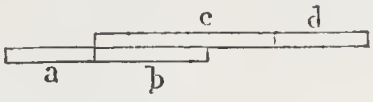


Fig. 8.



Anfangs- und zwei Endpunkten dar. Wenn derartige Ausdrücke wieder miteinander primär oder sekundär verbunden werden sollen, müssen offenbar die Verknüpfungsstellen genau bestimmt und danach die Resul-

Fig. 9.

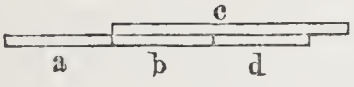
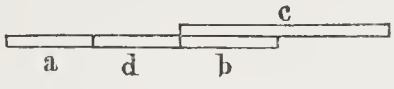


Fig. 10.



tate geschrieben werden. Soll z. B. zu dem letzteren Ausdrucke die Grösse d primär addirt werden; so entspricht das Resultat aus Fig. 8 der Formel $a + [b \dot{+} (c + d)]$, dagegen das Resultat aus Fig. 9 der

Fig. 11.

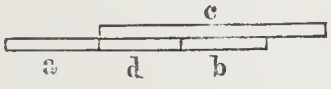


Fig. 12.

Formel $a + [(b + d) \dot{+} c]$, ferner das Resultat aus Fig. 10 der Formel $a + d + (b \dot{+} c)$, ferner das Resultat aus Fig. 11 der Formel $a + [(d + b) \dot{+} c]$, endlich das Resultat aus Fig. 12 der Formel $[a + (b \dot{+} d)] \dot{+} c$. Auf die rationelle Schreibung der komplizirteren Formeln werden wir alsbald zurückkommen. Vorläufig notiren wir nur noch die Formeln

$$(a \dot{+} b)\, c = a\, c \dot{+} b\, c$$

$$(a \dot{+} b)\,(c \dot{+} d) = a\, c \dot{+} a\, d \dot{+} b\, c \dot{+} b\, d$$

$$(a \dot{+} b)\,(c + d) = (a \dot{+} b)\, c + (a \dot{+} b)\, d$$
$$= (c + d)\, a \dot{+} (c + d)\, b$$

Von diesen beiden Auflösungen des Produktes $(a \dot{+} b)\,(c + d)$ hat die erste ausserhalb der Klammern das Zeichen $+$ und innerhalb der Klammern das Zeichen $\dot{+}$, dagegen die zweite ausserhalb der Klammern das Zeichen $\dot{+}$ und innerhalb der Klammern das Zeichen $+$. Wollte man auch die in diesen Auflösungen verbliebenen Klammern auflösen; so müsste man

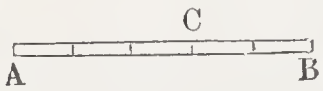
$$(a \dot{+} b)\,(c + d) = a\, c \dot{+} b\, c + a\, d \dot{+} b\, d$$
$$= a\, c + a\, d \dot{+} b\, c + b\, d$$

schreiben, dabei jedoch die Anfangsgrenze jedes folgenden Gliedes in der Endgrenze des unmittelbar vorhergehenden annehmen. Ebenso ist dann

$$(a \dot{+} b)(c + d) = ac \dot{+} bc + ad \dot{+} bd$$
$$= ac + ad \dot{+} bc + bd$$

Die sekundäre Subtraktion ist durch das Kominuszeichen $\dot{-}$ dargestellt und ebenso leicht verständlich wie die sekundäre Addition. So ergiebt die sekundäre Differenz $\dot{5} \dot{-} \dot{3} = \dot{2}$ eine Länge von einer Einheit mit zweifacher Dichte. Dagegen ist $5 \dot{-} 3 = 2$ nach Fig. 13 die sekundäre Differenz der Linie $AB = 5$ und der Linie $AC = 3$, also die Linie $CB = 2$. Während bei der sekundären Addition $a \dot{+} b$ sich die seitliche Anfangsgrenze von b an die seitliche Endgrenze von a so legt, dass die Anfangspunkte von a und b zusammenfallen, fordert die sekundäre Subtraktion $a \dot{-} b$, dass die seitliche Endgrenze von b sich an die seitliche Endgrenze von a so lege, dass auch jetzt die Anfangspunkte von a und b zusammenfallen, wodurch aus dem unendlich schmalen Rechtecke AB das Rechteck AC herausgeschnitten und das Rechteck $CB = 2$ übrig gelassen wird.

Fig. 13.



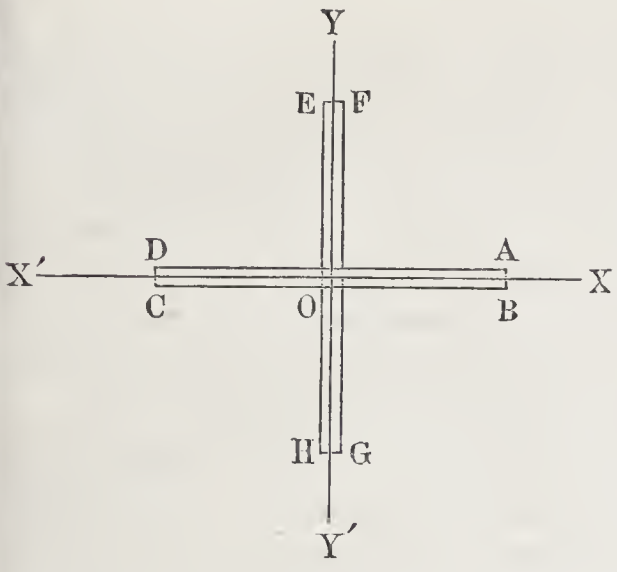
Positive und negative primäre Zahlen von gleichem absoluten Werthe vernichten sich nach der Formel $a - a = 0$, d. h., sie reduziren sich auf den Nullpunkt. Diese Auffassung ist jedoch ungenau: $a - a$ stellt keinen einfachen, sondern einen a-fachen Nullpunkt dar. Ein einfacher Nullpunkt wird nur durch die Differenz zweier Einheiten in der Form $1 - 1 = 0$ oder, wenn man ausdrücklich durch 0 einen einfachen Punkt bezeichnet, durch die Formel $1 - 1 = 1.0$ dargestellt. Die Differenz $a - a$ aber hat den Werth $a.1 - a.1 = a(1 - 1) = a.0$. In ähnlicher Weise vernichten sich gleiche positive und negative sekundäre Zahlen nach der Formel $a \dot{-} a = 0$; allein diese Formel hat einen wesentlich anderen Sinn. Die Vernichtung ist hier keine Vernichtung durch Aufhebung der Länge oder durch Rückschritt in der longitudinalen Richtung, sondern Vernichtung durch Aufhehung der elementaren Breite. Der Nullwerth aller sekundären Vielheiten ist immer als eine Länge von der Einheit 1, jedoch ohne alle Breite und demnach auch ohne Dichte oder ohne Inhalt zu betrachten. Bezeichnet man denselben mit $\dot{0}$; so ist $1 \dot{-} 1 = \dot{0}$ und $a \dot{-} a = a.1 \dot{-} a.1 = a(1 \dot{-} 1) = a.\dot{0}$. Die Differenz $a \dot{-} a$ stellt also eine inhaltslose Linie von der Länge a dar.

Die vorher mit dem Zeichen $\dot{+}$ niedergeschriebenen Formeln gelten auch mit dem Zeichen $\dot{-}$.

Wenn der sekundäre Subtrahend den Minuend überschreitet, entsteht die negative sekundäre Zahl $\dot{3} \dot{-} \dot{5} = \dot{-} \dot{2}$, welche die Länge der Einheit, aber 2-fache Dichte und eine umgekehrt liegende sekundäre Endgrenze hat. Während nämlich OA in Fig. 14 die positive primäre Zahl

$\dot{1}$ darstellt, deren sekundäre Anfangsgrenze in der Grundaxe OX liegt und deren sekundäre Endgrenze in der Grundebene XY der positiven imaginären Axe zugekehrt ist, stellt OB die Zahl $\div \dot{1}$ dar, deren sekundäre Anfangsgrenze ebenfalls in der Axe OX liegt, deren sekundäre Endgrenze aber nach unten gekehrt ist. Eine Zahl $\div \dot{a}$ nennen wir eine konegative und demgemäss $\dot{+} \dot{a}$ eine kopositive Zahl.

Fig. 14.



Die sekundäre Differenz zweier primären Zahlen $3 \div 5$ hat zwar den Inhalt von 2 konegativen Einheiten, kann jedoch nicht einfacher dargestellt werden.

Fasst man die sekundäre Subtraktion wie eine sekundäre Addition konegativer Zahlen auf; so ist

$$a \div b = a \dot{+} (\div b)$$

Das Beispiel $5 \div 3 = 5 \dot{+} (\div 3) = BA$ ist dann durch Fig. 15 und das Beispiel $3 \div 5 = 3 \dot{+} (\div 5) = BA$ durch Fig. 16 dargestellt;

Fig. 15.

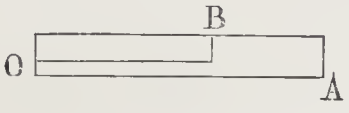
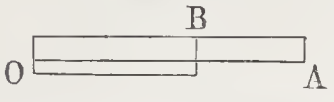


Fig. 16.



während jedoch BA in Fig. 15 eine von unten nach oben gemessene kopositive Breite hat, hat BA in Fig. 16 eine von oben nach unten zu messende konegative Breite.

In der konegativen Zahl $\div a$ erscheint $\div$ als ein Vorzeichen, wie $-$ in der negativen Zahl $-a$. Dasselbe bedeutet aber eine umgekehrte Breitenrichtung, keine umgekehrte Längenrichtung; dasselbe charakterisirt eine Zahl, welche, wenn sie als sekundärer Addend gebraucht wird, die Dichte vermindert, statt vermehrt, also eine Zahl wie OB in Fig. 14, deren elementare Breite in der Richtung der negativen imaginären Axe OY' liegt.

Wie man jeder positiven Zahl das Vorzeichen $+$ geben kann, kann man ihr auch das Vorzeichen $\dot{+}$ geben, man kann also für a auch $\dot{+} a$ schreiben, um damit die Grösse OA in Fig. 14 mit der längs OY gemessenen elementaren Breite darzustellen. Man kann auch beide Vorzeichen $+$ und $\dot{+}$ vor die Grösse OA setzen, also $+ \dot{+} a$ oder $\dot{+} + a$ dafür schreiben. Ebenso kann man $OB = + \div a = \div + a$ setzen.

Das Zeichen minus bewirkt eine halbe Umdrehung in der Grundebene XY um den Nullpunkt O. Hierdurch gelangt aber die Linie OA in die Lage OC, die Linie $-a = -\dot{+} a$ kehrt also ihre Breite nach unten. Die Linie $OB = \div a$ gelangt durch jene Drehung in die Lage OD, die Linie $- \div a$ kehrt mithin ihre Breite nach oben.

Das Zeichen kominus bewirkt eine halbe Umwälzung um die Grundaxe OX und man gelangt durch diese Bewegung aus der Lage $OA = \dot{+}\, a$ in die Lage $OB = \dot{-}\, a$, sowie aus der Lage $OC = -\, a$ in die Lage $OD = \dot{-} - a$.

Es ist $(\dot{-}\, 1)\,(\dot{-}\, 1) = \dot{+}\, 1$.

Die primäre Anfangsgrenze einer Grösse OA liegt im Nullpunkte O, die primäre Endgrenze A liegt bei den positiven Grössen vorn (gegen X hin), bei den negativen hinten (gegen X' hin). Die sekundäre Anfangsgrenze einer Grösse OA liegt in der Grundaxe OX, die sekundäre Endgrenze liegt bei den kopositiven Grössen oben (gegen Y hin), und die sekundäre Endgrenze bei den konegativen Grössen unten (gegen Y' hin). Bei der primären Erweiterung einer Grösse schreitet ihre primäre Endgrenze und bei der sekundären Erweiterung ihre sekundäre Endgrenze voran und Letzteres findet auch bei der direkten Drehung in der Grundebene statt.

Zur genauen Fixirung der Begriffe und Anschauungen ist die Regel festzuhalten, dass bei der sekundären Addition des Addends b zum Augend a immer der sekundäre Anfang von b sich an das sekundäre Ende von a legt, dass aber bei der sekundären Subtraktion des Subtrahends b vom Minuend a das sekundäre Ende von b sich mit dem sekundären Ende von a verbindet und dass das Resultat nicht geändert wird, wenn man die sekundäre Subtraktion in eine sekundäre Addition des konegativen Addends oder die sekundäre Addition in eine sekundäre Subtraktion des konegativen Subtrahends verwandelt. Bei dieser sekundären Addition und Subtraktion haben alle additiven und subtraktiven Grössen denselben primären Anfangspunkt, gleichviel, ob sie primär, positiv oder negativ sind.

Mit der sekundären Addition und Subtraktion kann sich die primäre Addition und Subtraktion vergesellschaften, wodurch alle möglichen wechselseitigen Verknüpfungen zwischen primären Anfangs- und Endpunkten und zwischen sekundären Anfangs- und Endgrenzen entstehen. Übrigens lassen sich alle diese Kombinationen auf eine Kombination primärer und sekundärer Addition zurückführen, sobald den additiven Grössen auch negative und konegative Werthe gegeben werden. So ist die sekundäre Addition und Subtraktion positiver und negativer Grössen durch folgende Formeln und Figuren dargestellt.

Fig. 17.

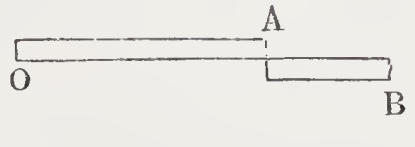


Fig. 18.

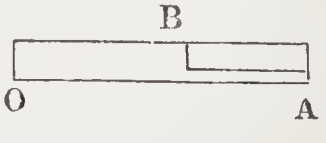
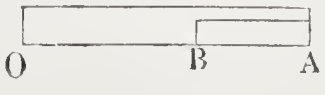


Fig. 19.



$a \dot{+} b = a \div (\div b)$ durch Fig. 5
$a \div b = a \dot{+} (\div b)$ durch Fig. 15
$a \dot{+} (- b)$ durch Fig. 18
$a \div (- b) = a \dot{+} (\div - b)$ durch Fig. 19

ferner die primäre Addition und Subtraktion kopositiver und konegativer Grössen

$a + b = a + (\dot{+} b)$ durch Fig. 4
$a + (\div b) = a - (- \div b)$ durch Fig. 17
(dem Inhalte nach auch $= a \div b$ aus Fig. 15)
$a - b = a - (\dot{+} b)$ durch Fig. 18
$a - (\div b) = a + (- \div b)$ durch Fig. 19.

Was die Schreibung der durch primäre und sekundäre Addition und Subtraktion gebildeten Ausdrücke betrifft; so dürfte es am einfachsten sein, das System mehrerer untereinandergesetzter Reihen zu adoptiren und in einer Reihe nur die durch primäre Addition und Subtraktion verbundenen Glieder aufzunehmen, sodass jede solche Reihe die Form $a + b + c + \cdots$ hat. Da die Glieder einer solchen Reihe nicht unmittelbar zusammenzuhängen brauchen, muss ein Symbol für eine leere Lücke eingeführt werden, wozu sich die schon in §. 5 des „Situationskalkuls“ für einen Abstand gebrauchten Anführungszeichen eigenen. Wenn also „b„ eine Lücke von der Länge b bezeichnet, stellt $a + „b„ + c$ eine Linie dar, welche sich erst auf die Entfernung a erstreckt, sodann die Lücke b hat und darauf wieder die Entfernung c ausfüllt. In der Formel $a\,a, + „b\,b„ + c\,c,$ haben die einzelnen Glieder verschiedene Dichten. Sodann ist festzusetzen, dass das erste Glied der Reihe im Nullpunkte beginnt, dass also, wenn der Anfangspunkt der Reihe in der Entfernung a liegt, das erste Glied die Lücke „a„ ist. Noch besser ist es, den Nullpunkt durch ein annullirtes Glied zu markiren. Die Erstreckung der Reihe in den negativen Theil der Zahlenreihe erfordert negative Glieder, welche links von dem annullirten Gliede gestellt werden können, ohne dass jedoch die Regel als eine bindende anzusehen ist. Das Schema eines in dieser Weise geordneten Aggregates ist alsdann

$$- f - „e„ - d - o + a + „b„ + c$$

Die durch sekundäre Addition mit diesem Aggregate verbundenen Aggregate werden in Horizontalreihen darüber, die durch sekundäre Subtraktion damit verbundenen darunter gesetzt. Hiernach ist das Schema eines vollständigen primären und sekundären Aggregates

$\dot{+} (- f'' - „e''„ - d'' - o + „a''„ + b'' + c'')$
$\dot{+} (- f' - e' - d' - o + a' + b' + c')$
$\dot{+} (- f - „e„ - d - o + a + „b„ + c)$
$\div (- f_1 - e_1 - „d_1„ - o + „a_1„ + b_1 + c_1)$
$\div (- f_2 - e_2 - d_2 - o + a_2 + b_2 + c_2)$

Wir wenden uns jetzt zu den sekundären Imaginärzahlen. Die imaginäre Linie $a\sqrt{-1}$ ist keine Längengrösse, sondern eine Breitengrösse; sie hat keine longitudinale, sondern laterale Ausdehnung; ihr Endpunkt ist zugleich im absoluten Grössensysteme eine Seitengrenze. Demzufolge hat die sekundäre Addition von imaginären Grössen in Beziehung auf die Veränderung des Endpunktes denselben Effekt wie die primäre Addition derselben. Solange es sich also nur um die Anschauung der Endpunkte handelt, ist $\dot{a}\sqrt{-1} = a\sqrt{-1}$, $(\dot{a} \dot{+} \dot{b})\sqrt{-1} = (a + b)\sqrt{-1}$, $(\dot{a} \dot{\div} \dot{b})\sqrt{-1} = (a - b)\sqrt{-1}$. Wenn jedoch diese Grössen in weitere Rechnungen verwickelt werden sollen, namentlich in solche, welche aus dem imaginären Gebiete in das reelle führen, müssen im Allgemeinen die ursprünglichen Werthe beibehalten werden.

Nach Vorstehendem ist die konegative Imaginärzahl $\dot{\div} a\sqrt{-1}$ der negativen $-a\sqrt{-1}$ unter dem oben gemachten Vorbehalte gleich.

Durch eine Viertelumdrehung um den Nullpunkt in der Grundebene entsteht in Fig. 14 aus $OA = \dot{+} a$ oder $+ a$ die Grösse $OE = \dot{+} a\sqrt{-1} = + a\sqrt{-1}$ und durch drei Viertelumdrehungen die Grösse $OG = - \dot{+} a\sqrt{-1} = - a\sqrt{-1}$. Dagegen entsteht durch diesen Prozess aus $OB = \dot{\div} a$ (indem immer die sekundäre Endgrenze voranschreitet) $OH = \dot{\div} a\sqrt{-1}$ und $OF = - \dot{\div} a\sqrt{-1}$, welche denselben Endpunkt von $OE = \dot{+} a\sqrt{-1}$, aber entgegengesetzte sekundäre Endgrenze hat. Die beiden Grössen $-a\sqrt{-1}$ und $\dot{\div} a\sqrt{-1}$, sowie auch die beiden Grössen $+\sqrt{-1}$ und $- \dot{\div} a\sqrt{-1}$ sind also nicht identisch, sondern unterscheiden sich durch entgegengesetzte Lage ihrer sekundären Endgrenzen.

Wir machen darauf aufmerksam, dass die sekundäre Vielheit $\dot{a}$, welche die Länge 1 bei der Dichte a hat, sich durch die Multiplikation mit $\sqrt{-1}$ in die sekundäre Imaginärzahl $\dot{a}\sqrt{-1}$ verwandelt, welche die Länge a bei einfacher Dichte hat, dass also diese Multiplikation eine Expansion zur Folge hat. Allgemein ist daher $a\dot{b}\sqrt{-1} = ab\sqrt{-1}$.

Wie man sieht, ist im Gebiete der primären und sekundären Zahlen jede reelle Zahl a zweideutig, nämlich $= \dot{+} a$ und auch $= \dot{\div} a$, gleichviel, ob a positiv oder negativ ist. Jede imaginäre Zahl dagegen ist vierdeutig, indem $a\sqrt{-1}$ sowohl die beiden Werthe $+ a\sqrt{-1}$ und $- \dot{\div} a\sqrt{-1}$, als auch die beiden Werthe $-a\sqrt{-1}$ und $\dot{\div} a\sqrt{-1}$ haben kann.

Die Zusammensetzung reeller und imaginärer Zahlen zu komplexen primären und sekundären Zahlen nach der Formel $a + b\sqrt{-1}$, worin a und b die allgemeine Form $\pm \dot{+} \dot{\div} aa_1$ haben können, bedarf keiner besonderen Erläuterung; ebenso wenig die Addition und Subtraktion solcher Grössen, indem sich die reellen und die imaginären Glieder für

sich verbinden. Auch die Multiplikation und Division solcher Grössen vollzieht sich nach den vorstehenden Grundregeln leicht und in ganz bestimmter Weise. Beispielsweise ist $(a + b\sqrt{-1})\,\dot{c} = a\dot{c} + b\dot{c}\sqrt{-1}$, worin das reelle Glied nicht verlängert, sondern verdichtet, das imaginäre Glied aber verlängert und nicht verdichtet ist, sodass man, wenn es sich lediglich um die Endpunkte handelt, $a + b\,c\sqrt{-1}$ dafür setzen kann. Ferner ist $(a + b\sqrt{-1})\,(\dot{c} + \dot{d}\sqrt{-1}) = (a\dot{c} - b\dot{d}) + (a\dot{d} + b\dot{c})\sqrt{-1}$, worin das reelle Glied die Länge $a - b$ bei ungleicher Dichte und das imaginäre Glied die Länge $a\,d + b\,c$ bei einfacher Dichte hat. Soll mit den Resultaten solcher Operationen weitergerechnet werden; so ist die Reduktion derselben oder einzelner Glieder auf Grössen, welche nur gleiche Endpunkte mit ihnen haben, denselben aber nicht völlig identisch sind, im Allgemeinen nicht zulässig: die Resultate müssen dann vielmehr ungeändert beibehalten werden. Wir werden hierauf zurückkommen.

Zunächst erwähnen wir derjenigen Grössen, welche aus den bisher betrachteten durch eine Viertelumwälzung um die Grundaxe OX, also durch Multiplikation mit $\sqrt{\div 1}$ entstehen. Eine positiv reelle oder vielmehr eine kopositive Zahl $+ a$ behält bei dieser Umwälzung zwar ihre reelle Richtung und ihre Länge oder ihre primäre Endgrenze, sie verlegt aber ihre sekundäre Endgrenze in die Ebene XZ, welche auf der Grundebene normal steht, und zwar kehrt sie diese Grenze nach oben. Hiernach erscheint $+ a\sqrt{\div 1}$ als ein Element der Ebene XZ. Die konegative Zahl $\div a = OB$ in Fig. 14 erzeugt die Zahl $\div a\sqrt{\div 1}$, welche ihre sekundäre Endgrenze nach unten kehrt, sonst aber mit der ersteren zusammenfällt. Die negative Zahl $- a = OC$ liefert die Zahl $- a\sqrt{\div 1}$, welche ihre sekundäre Endgrenze nach unten kehrt. Die negative Zahl $- \div a = OD$ führt zu der Zahl $- \div a\sqrt{\div 1}$, welche ihre sekundäre Endgrenze nach oben kehrt.

Aus den vier imaginären Zahlen OE, OF, OG, OH entstehen durch die Viertelumwälzung um die Grundaxe OX oder durch Multiplikation mit $\sqrt{\div 1}$ die in der tertiären Axe $Z'Z$ liegenden überimaginären Zahlen $a\sqrt{-1}\sqrt{\div 1}$, $- \div \sqrt{-1}\sqrt{\div 1}$, $- a\sqrt{-1}\sqrt{\div 1}$, $\div a\sqrt{-1}\sqrt{\div 1}$, wovon die ersten beiden in der Richtung OZ liegen, gleiche Endpunkte und entgegengesetzte sekundäre Endgrenzen in der Ebene XZ haben, während die letzten beiden in der entgegengesetzten Richtung OZ' liegen und ebenfalls gleiche Endpunkte, aber entgegengesetzte sekundäre Endgrenzen in der Ebene XZ haben. Diese vier überimaginären Sekundärzahlen, welche durch eine Viertelumwälzung des Imaginären entstehen, können auch durch eine Viertelumdrehung der durch eine Viertelumwälzung erzeugten reellen Zahlen $a\sqrt{\div 1}$, $- \div \sqrt{\div 1}$, $- a\sqrt{\div 1}$, $\div a\sqrt{\div 1}$, also durch eine Multiplikation derselben mit $\sqrt{-1}$ hergestellt werden. Die beiden Faktoren $\sqrt{-1}$ und $\sqrt{\div 1}$ sind vertauschbar.

Da die überimaginäre Grösse gegen die reelle Longitudinalgrösse ebenso gut eine Lateralgrösse ist, wie die imaginäre Grösse; so hat die sekundäre Addition der überimaginären Grössen den Effekt der primären Addition und, solange es sich lediglich um die Erstreckung bis zum Endpunkte handelt, kann man $\dot{a}\sqrt{-1}\sqrt{\div 1} = a\sqrt{-1}\sqrt{\div 1}$ setzen. Auch ist dann $\dot{+}\, a\sqrt{-1}\sqrt{\div 1} = a\sqrt{-1}\sqrt{\div 1}$ und $\dot{\div}\, a\sqrt{-1}\sqrt{\div 1} = -a\sqrt{-1}\sqrt{\div 1}$.

Die Addition der reellen Grössen mit dem Koeffizienten $\sqrt{\div 1}$ folgt übrigens ganz den Regeln der Addition kopositiver und konegativer Sekundärzahlen: es ist $a\sqrt{\div 1}$ nicht $= \dot{a}\sqrt{\div 1}$, vielmehr hat die erste Linie die Länge a bei einfacher Dichte, die zweite dagegen die Länge 1 bei a-facher Dichte. Wenn man bloss die Übereinstimmung der Richtung und des Endpunktes in Betracht zieht, ist $a\sqrt{\div 1}$ und $\div a\sqrt{\div 1}$ gleich a und auch $\div a$.

Wie das Imaginäre, so ist auch das Überimaginäre im Bereiche der Primär- und Sekundärzahlen vierdeutig.

Die Aggregate von reellen, imaginären und überimaginären Primär- und Sekundärzahlen liefern die triplexen Primär- und Sekundärzahlen nach der Formel

$$a + b\sqrt{-1} + c\sqrt{-1}\sqrt{\div 1}$$

Diese Formel ist eine Abkürzung des generellen Ausdruckes, welche nur so lange gültig ist, als es sich lediglich um die Längenerstreckung handelt. Für diese Voraussetzung involvirt das reelle Glied a alle in die reelle Axe OX fallenden Glieder $\dot{+}\, x$, $\dot{\div}\, x$, $\dot{+}\sqrt{\div 1}\, x$, $\dot{\div}\sqrt{\div 1}\, x$, worin x einen positiven oder negativen primären Werth haben kann. Wenn mit solchen Ausdrücken weitergerechnet werden soll, ist die Abkürzung unzulässig: es muss dann vor allen Dingen der reelle Theil vollständig beibehalten werden und ausserdem dürfen im imaginären und überimaginären Theile nicht ohne Weiteres die kopositiven und konegativen Zeichen in positive und negative verwandelt werden. Der generelle Ausdruck der triplexen Sekundärgrösse ist hiernach, wenn man jedes folgende Glied unmittelbar auf das vorhergehende bezieht,

$$m \dot{+}\, n\sqrt{\div 1} + b\sqrt{-1} \dot{+}\, c\sqrt{-1}\sqrt{\div 1}$$

worin m, n, b, c positive und negative reelle Werthe haben, auch primäre und sekundäre Vielheiten von der Form $p\dot{q}$ darstellen können. Ein solcher Ausdruck ergiebt sich aus dem Produkte einer primären und sekundären komplexen Zahl nach der Formel

$$(a + b\sqrt{-1})(\dot{a} \dot{+} \dot{b}\sqrt{\div 1}) = a(\dot{a} \dot{+} \dot{b}\sqrt{\div 1}) + \dot{a}\, b\sqrt{-1} \dot{+} b\dot{b}\sqrt{-1}\sqrt{\div 1}$$

Hiernach wenden wir uns zu der tertiären Addition. Betrachten wir eine in der Grundebene liegende reelle oder komplexe Linie, welche Länge und elementare Breite oder primäre und sekundäre Länge hat,

als einen Körper von unendlich geringer Höhe oder tertiärer Länge; so bewirkt eine tertiäre Addition eine Aufeinanderlagerung oder Ineinanderlegung solcher Linien über derselben Grundfläche. Als Operationszeichen gebrauchen wir das in §. 97 u. 98 der Naturgesetze eingeführte hyperplus $\dddot{+}$ oder $\dddot{+}$, indem wir jedoch einfacher dafür ein gewöhnliches plus mit zwei Punkten $\ddot{+}$ setzen. Das Operationszeichen der tertiären Subtraktion ist das hyperminus $\dddot{-}$. Die durch tertiäre Addition unter Aneinanderreihung der tertiären Endgrenzen oder Endflächen entstehenden tertiären Vielheiten bezeichnen wir in ähnlicher Weise wie die sekundären Vielheiten durch zwei Punkte, also wie $\ddot{0}$, $\ddot{1}$, $\ddot{2}$, $\ddot{3}$, $\ddot{125}$, $\ddot{a}$, $\ddot{b}$, $\ddot{c}$, $\ddot{d}$ u. s. w. Wenn daher $\ddot{1}$ die normale vertikale Dichtigkeit bedeutet; so zeigt $\ddot{a}$ eine a-fache Dichtigkeit in der Richtung der Axe OZ an und man hat $\ddot{5} \ddot{+} \ddot{3} = \ddot{8}$, $\ddot{5} \dddot{-} \ddot{3} = \ddot{2}$.

Alle Zahlen $\ddot{a}$ haben einfache Länge und einfache Breite, d. h. sie haben die Einheit zur Länge und einfache elementare Breite bei a-facher Höhe. Die Zahl $a\,\dot{b}\,\ddot{c}$, welche das Produkt aus der primären Vielheit a, der sekundären Vielheit $\dot{b}$ und der tertiären Vielheit $\ddot{c}$ darstellt, hat a-fache Länge, b-fache Breite und c-fache Höhe.

Die primäre Addition und Subtraktion solcher dreidimensionalen Zahlen erfolgt immer durch Anreihung mit den Endpunkten. Demnach hat $3.\dot{5}.\ddot{4} \ddot{+} 1.\dot{2}.\ddot{6}$ die Länge 4 und $3.\dot{5}.\ddot{4} - 1.\dot{2}.\ddot{6}$ die Länge 2. Die sekundäre Addition und Subtraktion geschieht nach der früheren Regel durch Anreihung mit den sekundären Endgrenzen; sie kann aber nur dann vollzogen werden, wenn Länge und Höhe gleich sind, wie in $3.\dot{5}.\ddot{4} \dot{+} 3.\dot{2}.\ddot{4} = 3.\dot{7}.\ddot{4}$ oder in $3.\dot{5}.\ddot{4} \div 3.\dot{2}.\ddot{4} = 3.\dot{3}.\ddot{4}$. Ebenso kann die tertiäre Addition und Subtraktion nur dann vollzogen werden, wenn Länge und Breite gleich sind, wie in $3.\dot{5}.\ddot{3} \ddot{+} 3.\dot{5}.\ddot{1} = 3.\dot{5}.\ddot{4}$ und $3.\dot{5}.\ddot{3} \dddot{-} 3.\dot{5}.\ddot{1} = 3.\dot{5}.\ddot{2}$.

Wenn der Subtrahend den Minuend überschreitet, ergiebt sich die hypernegative Zahl $\ddot{3} \dddot{-} \ddot{5} = \dddot{-} \ddot{2}$.

Wird das Hyperplus als Vorzeichen gebraucht; so stellt $\ddot{+} \ddot{2}$ eine hyperpositive Zahl dar. Man kann jeder Grösse die drei Vorzeichen $+ \dot{+} \ddot{+}$ geben.

Eine übersichtliche Schreibung der aus primären, sekundären und tertiären reellen Gliedern bestehenden Aggregate würde nur auf mehreren Blättern geschehen können.

Die imaginären und komplexen Zahlen $a + b\sqrt{-1}$ bauen sich durch tertiäre Addition ebenso wie die reellen übereinander auf, ohne ihre Länge und Breite zu ändern. Die Linie $\ddot{a}\sqrt{-1}$ hat die Länge 1 bei a-facher Höhendichte, die Linie $\ddot{a}\,b\sqrt{-1}$ hat die Länge b bei a-facher Höhendichte, die Linie $\ddot{a}\,\dot{c}\sqrt{-1}$ hat die Länge c bei a-facher

Höhendichte, die Linie $\ddot{a}\,b\dot{c}\,\sqrt{-1}$ hat die Länge bc bei a-facher Höhendichte.

Der Übergang von dem hyperpositiven zu dem hypernegativen Zeichen entspricht einer halben Umwendung (§. 98 der Naturgesetze). Eine Viertelumwendung erzeugt das Zeichen $\sqrt{\div 1}$. Dieses Zeichen repräsentirt nun, wie wir bei der Darlegung des anschaulichen und des abstrakten Kardinalprinzipes in §. 497 der Naturgesetze dargelegt haben, eine Richtung in dem abstrakten Grössengebiete jenseit des dreidimensionalen Bereiches, also eine Richtung, welche in dem Gebiete des anschaulichen Raumes nicht mehr existirt, welche sich vielmehr in jedem Punkte dieses Raumes, in welchem sie gemessen werden soll, verhüllt. Obwohl in der arithmetischen Abstraktion vollkommen berechtigt und von allen übrigen Grössen wesentlich verschieden, verschwindet doch jede mit $\sqrt{\div 1}$ multiplizirte Grösse vor unserer Anschauung, indem sich ihre abstrakte Ausdehnung oder Quantität in einem Punkte verhüllt oder auf Null reduzirt. Im Übrigen repräsentirt nicht $\sqrt{\div 1}$, sondern das Produkt dieser Grösse in die dritte Grundrichtung $\sqrt{-1}\,\sqrt{\div 1}$, also das Produkt $\sqrt{-1}\,\sqrt{\div 1}\,\sqrt{\div 1}$ die zur dritten Richtung OZ neutrale vierte Grundrichtung, in welcher die vierte Dimension des vierdimensionalen Raumes liegt.

Die vierdimensionalen Grössen setzen sich nach der Formel

$$a + b\sqrt{-1} + c\sqrt{-1}\sqrt{\div 1} + d\sqrt{-1}\sqrt{\div 1}\sqrt{\div 1}$$

aus vier gegeneinander neutralen Hauptgliedern zusammen, sind also quadruplexe Grössen, wenn man lediglich den nach dem Endpunkte führenden Vektor in Betracht zieht. Wie wir schon mehrfach angeführt haben, enthält diese Auffassung eine Abkürzung zu einem bestimmten Zwecke, ist aber für allgemeine Zwecke durchaus unzulänglich. Der generelle Ausdruck enthält auch Glieder von der Form $m\sqrt{\div 1}$, $n\sqrt{\div 1}$, $p\sqrt{-1}\,\sqrt{\div 1}$ und $q\sqrt{\div 1}\,\sqrt{\div 1}$, besteht also aus 8 Gliedern, welche man durch die Zeichen $+$, $\dot{+}$ und $\ddot{+}$ verbunden denken kann.

Es leuchtet ein, dass man im Sinne des Kardinalprinzipes die Reihe der primären, sekundären, tertiären Addition ins Unendliche fortsetzen kann, um damit in immer höhere Bereiche des abstrakten Grössengebietes einzudringen. Jede neue Stufe erfordert ein neues positives und negatives Zeichen, sowie eine entsprechende Bezeichnung der Vielheiten, wofür schliesslich ein Index angewandt werden muss. So können $\overset{n}{+}$, $\overset{n}{-}$, $\overset{n}{1}$, $\overset{n}{2}$, $\overset{n}{a}$ u. s. w. die Symbole für die n-te Operationsstufe sein.

Bei den verschiedenen Stufen der Addition haben wir doch immer nur Linien als Summanden vorausgesetzt. Dieselben Prinzipien finden aber auf jede Grössenart Anwendung: es bedarf nur der Feststellung der primären, sekundären, tertiären Grenze dieser Grössen. Handelt es sich um Flächen; so ist deren primäre Grenze der lineare Umfang. Die

sekundäre Grenze einer Fläche ist, wenn man sich die Fläche als unendlich dünnes Körperelement denkt, ihre obere und untere Seite. Stellt man sich eine solche Flächenseite einmal als den Inbegriff von Linien vor, welche mit der in dieser Fläche liegenden Grundaxe OX parallel laufen, einmal aber als den Inbegriff von Linien, welche mit der Axe OY parallel laufen; so kann man zwischen zwei Seiten einer Oberfläche unterscheiden, welche sich zu einander so verhalten, wie die beiden sekundären Grenzen einer Linie OX, von welchen die eine in der Ebene XY und die andere in der Ebene XZ liegt. Der Begriff der tertiären Grenze einer Fläche führt in das Gebiet des vierdimensionalen Raumes.

Handelt es sich um die Addition von Körpern; so ist deren primäre Grenze ihre Oberfläche. Die sekundäre Grenze eines Körpers ist sein kubischer Raum als Grenze eines vierdimensionalen Gebildes.

Für Punkte verschwindet der Unterschied zwischen primärer, sekundärer, tertiärer Addition, da alle Grenzen eines Punktes mit dem Punkte selbst zusammenfallen.

§. 4.

Primäre, sekundäre und tertiäre Multiplikation.

Primäre Multiplikation ist Vervielfältigung. Hierunter ist keineswegs eine Wiederholung des als Einheit gedachten Multiplikands oder eine Vereinigung mehrerer dem Multiplikand gleichen Einheiten zu verstehen, was ein Akt der Numeration sein würde, noch ist darunter eine fortgesetzte Anreihung oder Aneinanderreihung von Multiplikanden zu verstehen, was ein Akt der Addition sein würde; es ist darunter vielmehr eine Verhältnissänderung des Multiplikands, d. h. eine gleiche Veränderung aller seiner Theile nach einunddemselben durch den Multiplikator dargestellten Verhältnisse ohne irgend eine Änderung der Anzahl, noch des relativen Ortes dieser Theile, also eine Änderung des Verhältnisses zu der dem Multiplikand zu Grunde liegenden Einheit verstanden. Übrigens kann die Vervielfachung sowohl mit primären, als auch mit sekundären und tertiären Multiplikanden und Multiplikatoren geschehen, indem die Verhältnissänderung so gut die longitudinale, als auch die laterale und die altitudinale Ausdehnung betreffen kann. So sind $2.3 = 6$, $\dot{2}.3$, $2.\dot{3}$, $\dot{2}.\dot{3} = \dot{6}$, $\dot{2}.\ddot{3}$, $\ddot{2}.\ddot{3} = \ddot{6}$, $2.\dot{3}.\ddot{4}$ Beispiele von primärer Multiplikation.

Dass die Vervielfachungen mit primären, sekundären und tertiären Vielfachen sich nicht beeinflussen, also auch vertauscht werden können, leuchtet ein. Es ist $a.\dot{b}.\ddot{c} = \ddot{c}.a.\dot{b}$ u. s. w., ferner $a\dot{b}\ddot{c} \times \dot{c}d\ddot{f} = ad.\dot{\overline{bc}}.\ddot{\overline{cf}}$.

Aus den Multiplikationsregeln ergeben sich leicht die Divisionsregeln, wenn man erwägt, dass sich jede Grösse A als das Produkt von A und $1 . \dot{1} . \ddot{1}$ darstellen lässt, man hat

$$\frac{\dot{6}}{\dot{3}} = \dot{2} \quad \frac{\dot{6}}{3} = \frac{\dot{6} . 1}{3} = \dot{6} . \frac{1}{3}$$

$$\frac{6}{\dot{3}} = \frac{6 . \dot{1}}{\dot{3}} = 6 . \left(\frac{\dot{1}}{3}\right)$$

$$\frac{12}{\dot{2} . \ddot{3}} = \frac{12 . \dot{1} . \ddot{1}}{\dot{2} . \ddot{3}} = 12 \left(\frac{\dot{1}}{2}\right) \left(\frac{\ddot{1}}{3}\right)$$

$$\frac{\dot{\overline{12}}}{2 . \dot{2} . \ddot{3}} = \frac{1 . \dot{\overline{12}} . \ddot{1}}{2 . \dot{2} . \ddot{3}} = \frac{1}{2} \dot{6} \left(\frac{\ddot{1}}{3}\right)$$

Hiernach können unter den Faktoren und Quotienten auch gebrochene und irrationale Zahlen verstanden werden.

Während die primäre Multiplikation eine Veränderung des Verhältnisses zur Quantitätseinheit ist, stellt die sekundäre Multiplikation eine Änderung des Verhältnisses oder der Relation zur Grundrichtung dar: wir nennen sie Drehung oder Deklination. Die Drehung definirt sich als eine relative Bewegung und zwar, wenn der Multiplikand eine reelle Grösse OX ist, als eine Bewegung desselben um den Nullpunkt in der Grundebene oder als eine Bewegung unter Festhaltung des Nullpunktes O und der Grundebene XY. Das Resultat der Drehung ist der Austritt aus dem Gebiete des Reellen oder des Eindimensionalen in das Gebiet des Komplexen oder des Zweidimensionalen unter sukzessiver Vernichtung des Reellen und sukzessiver Erzeugung des Imaginären.

Eine halbe Umdrehung entspricht dem Zeichen oder Richtungskoeffizienten $-1 = (-1)^1$, eine Viertelumdrehung dem Zeichen $(-1)^{1/2} = \sqrt{-1}$, eine Drehung, welche den m-ten Theil einer halben Umdrehung oder den Winkel $\frac{\pi}{m}$ ausmacht, dem Zeichen $(-1)^{\frac{1}{m}}$. Allgemein, und wenn man $-1 = e^{\pi\sqrt{-1}}$ setzt, erhalten wir den Deklinationskoeffizienten D für den Drehungswinkel $m\pi$ in folgenden drei Formen

$$D = (-1)^m = e^{m\pi\sqrt{-1}} = \cos m\pi + \sin m\pi . \sqrt{-1}$$

Tertiäre Multiplikation oder sekundäre Drehung ist Wälzung oder Inklination. Sie ist eine relative Bewegung um die Grundaxe im Grundraume oder eine Bewegung unter Festhaltung der Grundaxe OX und des Grundraumes XYZ. Das Resultat der Wälzung ist der Austritt aus dem Gebiete des Komplexen oder des Zweidimensionalen in das des Triplexen oder des Dreidimensionalen unter

sukzessiver Vernichtung des Imaginären und sukzessiver Erzeugung des Überimaginären bei ungeänderter Festhaltung des Reellen.

Eine halbe Umwälzung entspricht dem Zeichen $\div 1 = (\div 1)^1$, eine Viertelumwälzung dem Zeichen $(\div 1)^{1/2} = \sqrt{\div 1}$, eine Wälzung, welche den n-ten Theil einer halben Umwälzung oder den Winkel $\frac{\pi}{n}$ ausmacht, dem Zeichen $(\div 1)^{\frac{1}{n}}$. Allgemein, und wenn man $\div 1 = e^{\dot{\pi}\sqrt{\div 1}}$ setzt, ergiebt sich der Inklinationskoeffizient J für den Winkel $n\pi$ in folgenden drei Formen

$$J = (\div 1)^n = e^{n\dot{\pi}\sqrt{\div 1}} = \dot{cos}\, n\pi \dot{+} \dot{sin}\, n\pi \sqrt{\div 1}$$

Die Wälzung nimmt die Drehungsebene oder Drehungsaxe mit sich, die Drehung nimmt aber nicht die Grundaxe oder die Wälzungsaxe mit sich: wird also eine in der Grundaxe liegende Linie erst um den Winkel β gewälzt und dann um den Winkel α gedreht; so erfolgt die Drehung in derjenigen Ebene, welche durch die Grundaxe geht und sich unter dem Winkel β gegen die Grundebene neigt. Drehung und Wälzung sind daher neutrale Operationen, welche sich nicht beeinflussen und miteinander vertauscht werden können, gleichwie sie beide zu der Vervielfachung neutral sind. Man hat demnach

$$DJ = JD \qquad aDJ = JDa = JaD$$

Das Projekt DJ stellt den vollständigen Richtungskoeffizienten jeder einfachen Linie im Raume und a deren Länge dar. Durch Entwicklung des Richtungskoeffizienten in einen triplexen Ausdruck ergiebt sich

$$\begin{aligned} a\, e^{\alpha\sqrt{-1}}\, e^{\dot{\beta}\sqrt{\div 1}} &= a\,(\dot{cos}\,\alpha + \dot{sin}\,\alpha\sqrt{-1})\,(\dot{cos}\,\beta \dot{+} \dot{sin}\,\beta\sqrt{\div 1}) \\ &= a\,\dot{cos}\,\alpha\,(\dot{cos}\,\beta \dot{+} \dot{sin}\,\beta\sqrt{\div 1}) + a\,\dot{sin}\,\alpha\,\dot{cos}\,\beta\sqrt{-1} \\ &\quad + a\,\dot{sin}\,\alpha\,\dot{sin}\,\beta\sqrt{-1}\sqrt{\div 1} \\ &= a\,\dot{cos}\,\alpha\,.\,e^{\dot{\beta}\sqrt{\div 1}} + a\,\dot{sin}\,\alpha\,\dot{cos}\,\beta\sqrt{-1} \\ &\quad + a\,\dot{sin}\,\alpha\,\dot{sin}\,\beta\sqrt{-1}\sqrt{\div 1} \quad . \ . \ . \ . \ (1) \end{aligned}$$

Das erste Glied ist reell und hat die Länge $a\,\dot{cos}\,\alpha$. Dasselbe besitzt die beiden Dichtigkeitskomponenten $\dot{cos}\,\beta$ und $\dot{sin}\,\beta\sqrt{\div 1}$; seine Dichte liegt also in der Inklinationsebene, in welcher die gegebene schräge Linie selbst liegt, und diese Dichte ist $\dot{cos}^2\,\beta \dot{+} \dot{sin}^2\,\beta = \dot{1}$, d. h. das reelle Glied hat bei der Länge $a\,\dot{cos}\,\alpha$ einfache Dichte. Das zweite Glied ist imaginär und hat nach §. 3 die Länge $a\,\dot{sin}\,\alpha\,\dot{cos}\,\beta$ bei einfacher Dichte. Das dritte Glied ist überimaginär und hat die Länge $a\,\dot{sin}\,\alpha\,\dot{sin}\,\beta$ bei einfacher Dichte. Wenn es also auf die Entstehung der Linie nicht ankömmt, sondern lediglich auf die Endpunkte der drei Glieder; so kann man schreiben

$$a\,e^{\alpha\sqrt{-1}}\,e^{\beta\sqrt{\div 1}} = a\cos\alpha + a\sin\alpha\cos\beta\sqrt{-1} + a\sin\alpha\sin\beta\sqrt{-1}\sqrt{\div 1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Den Ausdruck $\cos\alpha + \sin\alpha\cos\beta\sqrt{-1} + \sin\alpha\sin\beta\sqrt{-1}\sqrt{\div 1}$ haben wir im Situationskalkul und den Naturgesetzen den abgekürzten Richtungskoeffizienten genannt.

Ein Ausdruck von der Form

$$(r) = x + y\sqrt{-1} + z\sqrt{-1}\sqrt{\div 1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

lässt das Bildungsgesetz, wonach er entstanden, insbesondere sein Verhältniss zur Einheit nicht vollständig erkennen: er ist ein abgekürzter, lediglich als Fortschrittsgrösse aufgefasster Ausdruck. Sein Bildungsgesetz ergiebt sich aber leicht durch Vergleichung mit dem vollständigen Ausdrucke oder auch, da es nur auf die Kenntniss der Grössen a, α, β ankömmt, durch die Formeln

$$x = a\cos\alpha \quad y = a\sin\alpha\cos\beta \quad z = a\sin\alpha\sin\beta \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Dieselben ergeben zunächst als die Norm jenes Ausdruckes

$$a^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

sodann für die Grössen α und β

$$\cos\alpha = \frac{x}{a} \quad tang\,\beta = \frac{z}{y} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Der absolute oder Quantitätswerth des Ausdruckes ist

$$a = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

die Quadratwurzel aus der Norm.

Hierdurch wird der Deklinationskoeffizient D und der Inklinationskoeffizient J der Grösse (r)

$$D = \cos\alpha + \sin\alpha\sqrt{-1} = \frac{x + \sqrt{y^2 + z^2}\sqrt{-1}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

$$J = \dot{\cos}\,\beta + \dot{\sin}\,\beta\sqrt{\div 1} = \frac{\dot{y} + \dot{z}\sqrt{\div 1}}{\sqrt{\dot{y}^2 + \dot{z}^2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Die beiden Bedingungsgleichungen lassen für α und β ausser den Werthen $\alpha \pm 2m\pi$ und $\beta \pm 2n\pi$, worin m und n jede beliebige ganze Zahl darstellen kann, zwei Auflösungen zu. Wenn α und β die eine Auflösung darstellen, ist $-\alpha$ und $\pi + \beta$ die zweite (während im Gebiete der komplexen Grössen nur eine einzige Auflösung möglich ist).

Bei der Multiplikation mehrerer Grössen wie (r), (r_1) treten ihre Quantitäten, ihre Deklinations- und ihre Inklinationskoeffizienten resp. in primäre, sekundäre und tertiäre Verbindung, d. h. die Quantitäten vervielfältigen sich und die Deklinationswinkel, sowie auch die Inklinationswinkel summiren sich nach der Formel

$$a\,e^{\alpha\sqrt{-1}}\,e^{\dot{\beta}\sqrt{\div 1}} \times a_1\,e^{\alpha_1\sqrt{-1}}\,e^{\dot{\beta}_1\sqrt{\div 1}} = a\,a_1\,e^{(\alpha+\alpha_1)\sqrt{-1}}\,e^{(\dot{\beta}+\dot{\beta}_1)\sqrt{\div 1}}$$

$$= a\,a_1\,\{\cos(\alpha+\alpha_1) + \sin(\alpha+\alpha_1)\cos(\beta+\beta_1)\sqrt{-1}$$

$$+ \sin(\alpha+\alpha_1)\sin(\beta+\beta_1)\sqrt{-1}\sqrt{\div 1}\} \quad \ldots\ldots \quad (9)$$

Um zwei triplexe Zahlen miteinander zu multipliziren, müssen sie nothwendig vorher in die Form gebracht werden, welche ihr Verhältniss zur Einheit erkennen lässt oder welche ihnen die Eigenschaft von Faktoren verleiht.

Wenn Diess geschehen, wenn also

$$x + y\sqrt{-1} + z\sqrt{-1}\sqrt{\div 1} = (x + \sqrt{y^2+z^2}\sqrt{-1})\frac{\dot{y}+\dot{z}\sqrt{\div 1}}{\sqrt{y^2+z^2}} \quad (10)$$

$$x_1 + y_1\sqrt{-1} + z_1\sqrt{-1}\sqrt{\div 1} = (x_1 + \sqrt{y_1^2+z_1^2}\sqrt{-1})\frac{\dot{y}_1+\dot{z}_1\sqrt{\div 1}}{\sqrt{y_1^2+z_1^2}} \quad (11)$$

gesetzt ist, vollzieht sich die Multiplikation nach einfachen Regeln, wobei wir die durch $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ dargestellte Quantität gleich mit dem Deklinationskoeffizienten zusammengezogen haben. Das Produkt ist

$$\{(x x_1 - \sqrt{y^2+z^2}\sqrt{y_1^2+z_1^2}) + (x\sqrt{y_1^2+z_1^2} + x_1\sqrt{y^2+z^2})\sqrt{-1}\}$$

$$\times \frac{(\dot{y}\dot{y}_1 \div \dot{z}\dot{z}_1) + (\dot{y}\dot{z}_1 + \dot{y}_1\dot{z})\sqrt{\div 1}}{\sqrt{y^2+z^2}\sqrt{y_1^2+z_1^2}}$$

oder in verkürzter Form

$$(x x_1 - \sqrt{y^2+z^2}\sqrt{y_1^2+z_1^2}) + \frac{(x\sqrt{y_1^2+z_1^2} + x_1\sqrt{y^2+z^2})(y y_1 - z z_1)}{\sqrt{y^2+z^2}\sqrt{y_1^2+z_1^2}}\sqrt{-1}$$

$$+ \frac{(x\sqrt{y_1^2+z_1^2} + x_1\sqrt{y^2+z^2})(y z_1 + y_1 z)}{\sqrt{y^2+z^2}\sqrt{y_1^2+z_1^2}}\sqrt{-1}\sqrt{\div 1} \quad (12)$$

Der numerische Werth dieses Produktes ist

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2}\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}$$

Quartäre Multiplikation oder tertiäre Drehung oder sekundäre Wälzung ist Wendung oder Reklination. Sie ist, wie wir sie in §. 497 der Naturgesetze aufgefasst haben, eine relative Bewegung gegen die Grundebene im vierdimensionalen Raume, eine Bewegung unter Festhaltung der Grundebene. Das Resultat der Reklination ist der Austritt aus dem Gebiete des Triplexen oder des Dreidimensionalen in das Gebiet des Quadruplexen oder Vierdimensionalen unter sukzessiver Vernichtung der überimaginären oder dritten Dimension und sukzessiver Erzeugung der vierten Dimension bei ungeänderter Festhaltung der ersten und der zweiten Dimension.

Eine halbe Umwendung entspricht dem Zeichen $\div 1 = (\div 1)^1$, eine Viertelumwendung dem Zeichen $(\div 1)^{1/2} = \sqrt{\div 1}$, eine Reklination, welche den p-ten Theil einer halben Umwälzung oder den Winkel $\frac{\pi}{p}$ ausmacht, dem Zeichen $(\div 1)^{\frac{1}{p}}$. Allgemein ergiebt sich der Reklinationskoeffizient R für den Winkel $p\pi$ in den drei Formen

$$R = (\div 1)^p = e^{\ddot{p}\,\ddot{\pi}\sqrt{\div 1}} = \ddot{\cos} p\pi \dotplus \ddot{\sin} p\pi \sqrt{\div 1}$$

Vervielfachung, Deklination, Inklination und Reklination sind neutrale Multiplikationen, welche miteinander vertauscht werden können.

Die Reklination presst eine Linie des dreidimensionalen Raumes auf die Grundebene nieder oder hebt sie davon ab, ohne ihre Projektion auf die Grundebene zu ändern. Die vierte Dimension $\sqrt{-1}\sqrt{\div 1}\sqrt{\div 1}$, welche sie erzeugt, verhüllt sich dem Anschauungsvermögen in dem Endpunkte der triplexen Grösse, an welchen sich diese vierte Dimension in der Abstraktion anschliesst. Man hat für eine vierdimensionale Grösse genau

$$a\,e^{\alpha\sqrt{-1}}\,e^{\dot{\beta}\sqrt{\div 1}}\,e^{\ddot{\gamma}\sqrt{\div 1}} = a(\cos\alpha + \sin\alpha\sqrt{-1})\,(\dot{\cos}\beta \dotplus \dot{\sin}\beta\sqrt{\div 1})$$
$$\times\,(\ddot{\cos}\gamma \dotplus \ddot{\sin}\gamma\sqrt{\div 1}) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

oder auch bei sukzessiver Auflösung

$$a\{\cos\alpha\,\dot{c}^{\beta\sqrt{\div 1}}\,\ddot{c}^{\gamma\sqrt{\div 1}} \dotplus \sin\alpha\,\dot{\cos}\beta\sqrt{-1}\,\ddot{c}^{\gamma\sqrt{\div 1}}$$
$$\dotplus \sin\alpha\,\dot{\sin}\beta\,\ddot{\cos}\gamma\sqrt{-1}\sqrt{\div 1}$$
$$\ddot{\dotplus} \sin\alpha\,\dot{\sin}\beta\,\ddot{\sin}\gamma\sqrt{-1}\sqrt{\div 1}\sqrt{\div 1}\} \quad (14)$$

Da die tertiäre und quartiäre Multiplikation eine reelle Grösse $\cos\alpha$ nicht ändert, da ferner die quartäre Multiplikation die imaginäre Grösse $\sin\alpha\cos\beta\sqrt{-1}$ nicht ändert und da endlich die sekundären, tertiären und quartären Vielfachen in imaginären, überimaginären und überüberimaginären Grössen die Wirkung primärer Vielfachen haben, auch die sekundären und tertiären Additionen solcher Grössen den primären gleich zu achten sind; so kann man den vorstehenden Ausdruck, solange es sich nur um die Deckung in den Eckpunkten handelt, in abgekürzter Form folgendermaassen schreiben

$$a\{\cos\alpha + \sin\alpha\cos\beta\sqrt{-1} + \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma\sqrt{-1}\sqrt{\div 1}$$
$$+ \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\sqrt{-1}\sqrt{\div 1}\sqrt{\div 1}\} \quad \ldots\ldots \quad (15)$$

Die Norm dieser Grösse ist die Summe der Quadrate der absoluten Werthe der Glieder dieses Ausdruckes, also $= a^2$. Von dieser Grösse ist nur der im dreidimensionalen Raume liegende, durch die ersten drei Glieder dargestellte Theil

$$a(\cos\alpha + \sin\alpha\cos\beta\sqrt{-1} + \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma\sqrt{-1}\sqrt{\div 1})$$

anschaulich. Die Länge dieser Linie ist nicht gleich a, sondern gleich

$$a\sqrt{1 - \sin^2\alpha\sin^2\beta\sin^2\gamma}$$

Indem wir die Neutralitätsstufen der Multiplikation verallgemeinern, sagen wir, die n-te Stufe der Multiplikation oder die $(n-1)$-te Stufe der Drehung oder die $(n-2)$-te Stufe der Wälzung oder die $(n-3)$-te Stufe der Wendung verlange den Austritt aus dem durch die vorhergehende Operation erzeugten Dimensionsgebiete in das nächst höhere unter sukzessiver Vernichtung der zuletzt erzeugten Dimension und sukzessiver Erzeugung der nächst höheren bei ungeänderter Festhaltung der früheren Dimensionen oder Koordinaten. Daraus ergiebt sich z. B. für die sechsdimensionale Grösse, wenn wir jetzt zur Vereinfachung

$$i = \sqrt{-1} \quad i_1 = \sqrt{\div 1} \quad i_2 = \sqrt{\div\div 1} \text{ u. s. w.,}$$

ferner

$$i = j \quad ii_1 = j_1 \quad ii_1i_2 = j_2 \text{ u. s. w.}$$

setzen und die Punkte über den in die Koeffizienten i oder j multiplizirten Faktoren unterdrücken, da dieselben durch jene Koeffizienten hinreichend charakterisirt sind,

$$\begin{aligned} a e^{\alpha i} e^{\alpha_1 i_1} e^{\alpha_2 i_2} e^{\alpha_3 i_3} e^{\alpha_4 i_4} &= a(\cos\alpha + \sin\alpha . i)(\cos\alpha_1 \dot{+} \sin\alpha_1 . i_1) \times \\ &(\cos\alpha_2 \ddot{+} \sin\alpha_2 . i_2)(\cos\alpha_3 \dddot{+} \sin\alpha_3 . i_3)(\cos\alpha_4 \overset{\cdot\cdot\cdot\cdot}{+} \sin\alpha_4 i_4) \\ &= a\{\cos\alpha\, e^{\alpha_1 i_1} e^{\alpha_2 i_2} e^{\alpha_3 i_3} e^{\alpha_4 i_4} + \sin\alpha\cos\alpha_1 j e^{\alpha_2 i_2} e^{\alpha_3 i_3} e^{\alpha_4 i_4} \\ &\dot{+} \sin\alpha\sin\alpha_1\cos_2 j_1 e^{\alpha_3 i_3} e^{\alpha_4 i_4} \ddot{+} \sin\alpha\sin\alpha_1\sin\alpha_2\cos\alpha_3 j_2 e^{\alpha_4 i_4} \\ &\dddot{+} \sin\alpha\sin\alpha_1\sin\alpha_2\sin\alpha_3\cos\alpha_4 j_3 \overset{\cdot\cdot\cdot\cdot}{+} \sin\alpha\sin\alpha_1\sin\alpha_2\sin\alpha_3\sin\alpha_4 j_4\} \quad 16) \end{aligned}$$

Da das Reelle durch tertiäre und höhere Multiplikation, das Imaginäre durch quartäre und höhere Multiplikation, das Überimaginäre durch quintäre und höhere Multiplikation u. s. w. keine andere Richtung erhält; so kann man den vorstehenden Ausdruck, solange es sich nur um die Deckung in den Eckpunkten handelt, in folgender abgekürzter Form schreiben, worin, unter Vorbehalt des richtigen Verständnisses, alle Glieder durch einfache Pluszeichen verbunden sind.

$$\begin{aligned} &a\{\cos\alpha + \sin\alpha\cos\alpha_1 . j + \sin\alpha\sin\alpha_1\cos\alpha_2 . j_1 \\ &+ \sin\alpha\sin\alpha_1\sin\alpha_2\cos\alpha_3 . j_2 + \sin\alpha\sin\alpha_1\sin\alpha_2\sin\alpha_3\cos\alpha_4 . j_3 \\ &+ \sin\alpha\sin\alpha_1\sin\alpha_2\sin\alpha_3\sin\alpha_4 . j_4\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17) \end{aligned}$$

Der abgekürzte Ausdruck ist der gegebenen Grösse als Fortschrittsgrösse gleich, d. h. beide haben dieselben Endpunkte; er ist ihr aber nicht als Verhältnissgrösse gleich, d. h. beide stellen nicht gleiche Resultate nach dem Verhältnissgesetze oder als Produkte dar, sind mithin einander

nicht äquipollent, wenn wir den Ausdruck Äquipollenz für die Übereinstimmung zweier Grössen nach dem Verhältnissgesetze gebrauchen. Die Norm dieser Grösse oder die Summe der Quadrate der absoluten Werthe ihrer Glieder ist a^2. Anschaulich sind von dieser Grösse nur die im dreidimensionalen Raume liegenden drei Glieder, deren Länge

$$a \sqrt{1 - \sin^2\alpha \sin^2\alpha_1 \sin^2\alpha_2}$$

ist.

Es ist von entschiedener Wichtigkeit, dass alle Glieder des abgekürzten Ausdruckes gleiche und einfache Dichte haben, da die unterdrückten Koeffizienten sämmtlich von der Form $e^{\alpha i}$ sind, also den Quantitätswerth der Einheit haben.

Man erkennt, dass primäre, sekundäre, tertiäre Drehung gleichbedeutend ist mit Multiplikation durch eine primäre, sekundäre, tertiäre Potenz von der allgemeinen Form $e^{\alpha i} = \cos\alpha + \sin\alpha \,.\, i$. Jenachdem der Multiplikand eine solche primäre, sekundäre, tertiäre Potenz ist, oder jenachdem Multiplikand oder Multiplikator Produkte aus primären, sekundären, tertiären Potenzen sind, erhält man eine Kombination von mehreren neutralen Drehungen.

Die Division durch die allgemeine Grösse

$$a\,\dot{a}_1\,\ddot{a}_2\,e^{\alpha i}\,e^{\alpha_1 i_1}\,e^{\alpha_2 i_2}$$

wird stets auf eine Multiplikation mit der Grösse

$$\frac{1}{a\,\dot{a}_1\,\ddot{a}_2}\,e^{-\alpha i}\,e^{\div \alpha_1 i_1}\,e^{\div\div \alpha_2 i_2}$$

zurückgeführt und an den betreffenden Faktoren des Dividends ausgeführt, indem man den letzteren nöthigenfalls durch die Faktoren $1\,\dot{1}\,\ddot{1}\ldots$ ergänzt, um die Division mit der primären, sekundären, tertiären Vielheit a, $\dot{a}_1$, $\ddot{a}_2$ resp. an dem Faktor 1, $\dot{1}$, $\ddot{1}$ u. s. w. zu vollziehen.

Die Multiplikation und Division von Grössen, welche in abgekürzter Form gegeben sind, kann nicht ohne Weiteres bewirkt werden, da die abgekürzte Form eine Grösse lediglich als eine aus dem Nullpunkte durch Anreihung entstandene Fortschrittsgrösse darstellt, ohne ihr Verhältniss zur Einheit, worauf es wesentlich ankömmt, wenn die Grösse als Faktor auftreten soll, erkennen zu lassen. Durch die Vervollständigung des Ausdruckes nehmen zwei miteinander zu multiplizirende Grössen die Form

$$a\dot{m} + a\dot{n}\sqrt{\div 1} + b\dot{m}\sqrt{-1} + b\dot{n}\sqrt{-1}\sqrt{\div 1} \quad \ldots\ldots \quad (18)$$

$$a_1\dot{m}_1 + a_1\dot{n}_1\sqrt{\div 1} + b_1\dot{m}_1\sqrt{-1} + b_1\dot{n}_1\sqrt{-1}\sqrt{\div 1} \quad \ldots \quad (19)$$

an und ihre Multiplikation erzeugt das Aggregat

$$aa_1\,[m\dot{m}_1 \div n\dot{n}_1 + (m\dot{n}_1 \dot{+} \dot{m}_1 n)\sqrt{\div 1}]$$
$$- bb_1\,m\dot{m}_1 - \div bb_1\,\dot{n}n_1 - bb_1\,m\dot{m}_1\sqrt{\div 1} - bb_1\,\dot{m}_1 n\sqrt{\div 1}$$
$$[ab_1\,m\dot{m}_1 + a_1 b\,m\dot{m}_1 \div ab_1\,nn_1 \div a_1 b\,nn_1]\sqrt{-1}$$
$$[ab_1 m_1 \dot{n} + a_1 b m\dot{n}_1 + ab_1 \dot{m}n_1 + a_1 b\dot{m}_1 n]\sqrt{-1}\sqrt{\div 1}$$

welches sich zu dem Ausdrucke

$$(aa_1 - bb_1)\,[(m\dot{m}_1 \div n\dot{n}_1) \dot{+} (m\dot{n}_1 \dot{+} \dot{m}_1 n)\sqrt{\div 1}]$$
$$+ (ab_1 + a_1 b)\,(m\dot{m}_1 \div n\dot{n}_1)\sqrt{-1}$$
$$\dot{+} (ab_1 + a_1 b)\,(m\dot{n}_1 \dot{+} \dot{m}_1 n)\sqrt{-1}\sqrt{\div 1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

zusammenzieht. Der abgekürzte Werth desselben ist

$$(aa_1 - bb_1) + (ab_1 + a_1 b)\,(mm_1 - nn_1)\sqrt{-1}$$
$$+ (ab_1 + a_1 b)\,(mn_1 + m_1 n)\sqrt{-1}\sqrt{\div 1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

Eine Grösse $ae^{\alpha i}e^{\beta i_1}e^{\gamma i_2}\ldots$, welche das Produkt einer einfachen Quantität a, eines einfachen Deklinationskoeffizienten $e^{\alpha i}$, eines einfachen Inklinationskoeffizienten $e^{\beta i_1}$, eines einfachen Reklinationskoeffizienten $e^{\gamma i_2}$ u. s. w. ist, nennen wir eine einfache Grösse; sie repräsentirt eine gerade Linie von der Länge a und der durch die letzteren Koeffizienten bestimmten Richtung. Die gemeine reelle Zahl ist der spezielle Fall der einfachen Zahlen, welcher den Werthen $\alpha = \beta = \gamma = \cdots = 0$ oder dem Richtungskoeffizienten $(+\,\dot{+}\,\ddot{+}\ldots)$ entspricht.

Eine einfache Grösse kann als ein Aggregat von einfachen Gliedern dargestellt werden, deren Richtungskoeffizienten Produkte von je einem, je zwei, je drei u. s. w. neutralen Zeichen 1, i, i_1, i_2 u. s. w. sind, also aus Gliedern mit den Zeichen

$$1,\ i,\ i_1,\ i_2\ldots,\ ii_1,\ ii_2,\ i_2 i_3\ldots,\ ii_1 i_2,\ ii_2 i_3,\ i_1 i_2 i_3\ldots,\ ii_1 i_2 i_3\ldots$$

Diese Glieder sind zum Theil durch primäre, zum Theil durch sekundäre, zum Theil durch tertiäre Addition verbunden und bestehen aus primären, sekundären, tertiären Faktoren, welche ganz bestimmte Funktionen der Grössen a, α, β, $\gamma\ldots$ sind, die sich sofort ergeben, sobald man die Richtungskoeffizienten

$$e^{\alpha i} = \cos\alpha + \sin\alpha i$$
$$e^{\beta i_1} = \dot{\cos}\beta \dot{+} \dot{\sin}\beta \,.\, i_1$$
$$e^{\gamma i_2} = \ddot{\cos}\gamma \ddot{+} \ddot{\sin}\gamma \,.\, i_2$$

u. s. w. setzt und die Multiplikation ausführt. Das auf diese Weise entstehende, der gegebenen einfachen Grösse gleiche und äquipollente Polynom enthält alle Glieder mit den möglichen Produkten aus den gegeneinander neutralen Koeffizienten 1, i, i_1, $i_2\ldots$ Diese Produkte verhalten sich nun zwar ebenso wie ihre Faktoren nach abstrakter oder arithmetischer Auffassung, nicht aber in geometrischer Anschauung gegeneinander neutral, weil sie sich zum Theil nur durch die Richtung ihrer Breiten-

und Höhendimensionen unterscheiden, also, da diese Dimensionen an Linien nur eine unendlich geringe Ausdehnung haben, in dieselbe geometrische Richtung fallen können. So liegt sowohl die Linie a als auch die Linie $\sqrt{\div 1}$ in der reellen Axe OX. Wir unterscheiden das eben erwähnte Polynom von anderen polynomialen Werthen, welche der gegebenen Grösse gleich sind, durch die Bezeichnung des zergliederten Grundpolynoms.

Durch Zusammenziehung der Glieder nach dem zweiten in Gl. (16) aufgestellten Ausdrucke erscheint die gegebene einfache Grösse als ein Aggregat von Gliedern, welche in den Richtungen der aufeinander normal stehenden Grundaxen OX, OY, OZ . . . liegen oder die Richtungskoeffizienten $1, j, j_1, j_2$ . . . haben, indem diese Glieder nur noch mit solchen Richtungskoeffizienten multiplizirt erscheinen, welche auf die eben erwähnten Richtungen keinen drehenden Einfluss haben. Wenn man die letzteren Koeffizienten unterdrückt, erhält man den abgekürzten Ausdruck (17). Auch die Glieder dieses abgekürzten Ausdruckes und die unterdrückten Koeffizienten sind bestimmte Funktionen der Grössen a, α, β, γ . . .

Die Glieder des letzteren Aggregates stehen nicht bloss in arithmetischer, sondern auch in geometrischer Neutralität; dasselbe besitzt zugleich die kleinstmögliche Zahl von neutralen Gliedern, in welchen die gegebene Grösse darstellbar ist, nämlich gerade soviel Glieder, als neutrale Multiplikationen (Vervielfachung, Drehung, Wälzung, Wendung u. s. w.) erforderlich sind, um die gegebene einfache Grösse zu erzeugen. Seine Glieder haben sämmtlich einfache Dichte. Wir nennen dieses Aggregat das geordnete Grundpolynom und das abgekürzte Aggregat die polynomiale Projektion der gegebenen einfachen Grösse auf das System der normalen Axen. Dass jedes arithmetische Polynom ein geometrisches Polygon vertritt, braucht kaum erwähnt zu werden.

Da die Glieder eines Grundpolynoms in einer gewissen Beziehung zu der Quantität a, der Deklination α, der Inklination α_1, der Reklination α_2 u. s. w. der ihm gleichen einfachen Grösse stehen; so kann ein aus neutralen Gliedern bestehendes Polynom nur dann ein Grundpolynom oder einer einfachen Grösse äquipollent sein, wenn die Werthe seiner Glieder nicht mehr Bedingungsgleichungen liefern, als unbekannte Grössen $a, \alpha, \alpha_1, \alpha_2 \ldots$ zu bestimmen sind. Demnach sind manche Aggregate keine Grundpolynome, also keiner einfachen Grösse äquipollent, lassen sich aber immer auf ein aus einfachen Grössen zusammengesetztes Polynom von kleinstmöglicher Gliederzahl reduziren. Ein abgekürztes Aggregat kann stets die Projektion einer einfachen Grösse sein, weil die Zahl der Bedingungen zur Bestimmung der Unbekannten gerade ausreicht; übrigens ist ein abgekürztes Aggregat niemals ein Grundpolynom: ein abgekürztes Aggregat oder eine Projektion ist daher einer einfachen Grösse gleich, aber nicht ihr äqui-

pollent. Für die den unteren Grössengebieten angehörigen Polynome machen wir noch folgende Bemerkungen.

Das eingliedrige Monom x einer reellen Grösse ist stets ein Grundpolynom und auch eine Projektion auf die reelle Axe, stellt also eine einfache Grösse des eindimensionalen Gebietes dar.

Das zweigliedrige Binom einer komplexen Grösse $x + y \,.\, i$ kann stets ein Grundpolynom sein, also stets eine einfache Grösse aus dem zweidimensionalen Gebiete $a\,e^{\alpha i} = a\cos\alpha + a\sin\alpha \,.\, i$ darstellen, indem die Bedingungen $x = a\cos\alpha$, $y = a\sin\alpha$ durch reelle Werthe von a und α zu erfüllen sind. Jenes Binom ist auch eine Projektion auf das System der reellen und imaginären Axe.

Das dem dreidimensionalen Gebiete angehörige zergliederte Polynom ist viergliedrig $m + n i_1 + y i + z i i_1$ und stellt nicht immer ein Grundpolynom dar, da Letzteres die Form

$$a\cos\alpha\,\cos\alpha_1 + a\cos\alpha\,\sin\alpha_1 i_1 + a\sin\alpha\,\cos\alpha_1 i + a\sin\alpha\,\sin\alpha_1 i i_1$$

hat. Auch das geordnete Polynom $x + y i + z i i_1$ ist nicht immer ein Grundpolynom, da dieses die Form

$$a\cos\alpha\,e^{\alpha_1 i_1} + a\sin\alpha\,\cos\alpha_1 i + a\sin\alpha\,\sin\alpha_1 i i_1$$

hat. Wohl aber ist das abgekürzte Polynom $x + y i + z i i_1$, worin x, y, z reelle Werthe haben, stets die Projektion einer einfachen Grösse $a\,e^{\alpha i}\,e^{\alpha_1 i_1}$, nämlich stets gleich

$$a\cos\alpha + a\sin\alpha\,\cos\alpha_1 i + a\sin\alpha\,\sin\alpha_1 i i_1$$

Wenn nun ein zergliedertes oder ein geordnetes Polynom im dimensionalen Gebiete nicht unbedingt einer einfachen Grösse äquipollent ist; so ist dasselbe doch stets einem Polygone von mehreren einfachen Seiten, nämlich dem Ausdrucke

$$\Sigma\, a\, e^{\alpha i}\, e^{\alpha_1 i_1}\, e^{\alpha_2 i_2} \ldots$$

oder noch allgemeiner einem Ausdrucke von dieser Form äquipollent, worin a ein Produkt $c\dot{c}_1\ddot{c}_2\ldots$ von primären, sekundären, tertiären u. s. w. Vielheiten ist und worin die einzelnen Glieder durch primäre, sekundäre, tertiäre u. s. w. Addition miteinander verbunden sind.

Polynome, deren Glieder durch primäre Addition verbunden sind, werden nach gewöhnlichen Regeln miteinander multiplizirt. So hat man z. B.

$$\begin{aligned}(a\,e^{\alpha i}\,e^{\beta i_1} + a_1\,e^{\alpha_1 i}\,e^{\beta_1 i_1})\,(r\,e^{\phi i}\,e^{\psi i_1} + r_1\,e^{\phi_1 i}\,e^{\psi_1 i_1}) &= a\,r\,e^{(\alpha+\phi) i}\,e^{(\beta+\psi) i_1} \\ &+ a\,r_1\,e^{(\alpha+\phi_1) i}\,e^{(\beta+\psi_1) i_1} + a_1\,r\,e^{(\alpha_1+\phi) i}\,e^{(\beta_1+\psi) i_1} \\ &+ a_1\,r_1\,e^{(\alpha_1+\phi_1) i}\,e^{(\beta_1+\psi_1) i_1}\end{aligned}$$

Die Glieder dieses Produktes sind wie die Glieder der Faktoren durch das Pluszeichen verbunden: würde also in einem dieser Glieder die

Deklination gleich null und die Inklination gleich $\frac{\pi}{2}$, das Glied selbst also gleich $+ ar e^{\frac{\pi}{2} i_1} = + ar i_1 = + ar \sqrt{\div 1}$, so dürfte man dafür nicht $\dot{+} ar \sqrt{\div 1}$ setzen, weil Diess eine ganz andere Bedeutung haben würde.

Soll der Ausdruck $x + yi + zii_1$ kein abgekürztes, sondern ein vollständiges Polygon, also dem Ausdrucke

$$x e^{0\,i} e^{0\,i_1} + y e^{\frac{\pi}{2} i} e^{0\,i_1} + z e^{\frac{\pi}{2} i} e^{\frac{\pi}{2} i_1}$$

äquipollent sein; so ergiebt eine Multiplikation mit einem ähnlichen Ausdrucke $x_1 + y_1 i + z i i_1$ das Produkt

$$(x x_1 - y y_1 - z z_1) - (y z_1 + y_1 z) i_1 + (x y_1 + x_1 y) i + (x z_1 + x_1 z) i i_1$$

welches von dem Ausdrucke (12) wesentlich verschieden ist.

Hinsichtlich der Verknüpfung beliebiger Grössen durch sekundäre, tertiäre u. s. w. Addition; so bemerken wir noch, dass die Ausdrücke

$$(a e^{\alpha i} e^{\beta i_1} + a_1 e^{\alpha_1 i} e^{\beta_1 i_1}),\quad (a e^{\alpha i} e^{\beta i_1} \dot{+} a_1 e^{\alpha_1 i} e^{\beta_1 i_1}),\quad (a e^{\alpha i} e^{\beta i_1} \ddot{+} a_1 e^{\alpha_1 i} e^{\beta_1 i_1})$$

ganz verschiedenen Werth haben. Während z. B.

$$a e^{\alpha i} + a_1 e^{\alpha_1 i} = (a \cos\alpha + a_1 \cos\alpha_1) + (a \sin\alpha + a_1 \sin\alpha_1) i$$

ist, hat man

$$a e^{\alpha i} \dot{+} a_1 e^{\alpha_1 i} = (a \cos\alpha \dot{+} a_1 \cos\alpha_1) + (a \sin\alpha \dot{+} a_1 \sin\alpha_1) i$$

in welchen beiden Ausdrücken sich wohl die imaginären, nicht aber die reellen Glieder decken.

§. 5.

Vieldeutigkeit.

Wenn der Anfangs- oder Endpunkt einer geraden Linie gegeben ist; so ist dieselbe als Fortschrittsgrösse oder als das Resultat eines Fortschrittes, nicht aber als das Resultat einer Drehung bestimmt. Diese Linie kann möglicherweise durch keine, durch eine, durch zwei, durch drei u. s. w. Umdrehungen aus der positiven Richtung entstanden sein, sie kann aber auch keine, eine, zwei, drei u. s. w. Umwälzungen, auch keine, eine, zwei, drei u. s. w. Umwendungen u. s. w. erlitten haben.

Wie geometrisch die Linie, so ist arithmetisch die Zahl, wenn sie lediglich als Fortschritts- oder Reihengrösse oder als Resultat einer Addi-

tion gegeben ist, wohl gegen die Null, aber noch nicht als Verhältnissgrösse oder gegen die Einheit bestimmt. Sie kann jeden Richtungskoeffizienten von der Form $e^{2r\pi i} e^{2s\pi i_1} e^{2t\pi i_2} \ldots$ besitzen. Ist eine Grösse in ihrem Verhältnisse zur Einheit, also in der Form $a e^{\alpha i} e^{\beta i} e^{\gamma i} \ldots$ mit bestimmter Quantität a, bestimmter Deklination α, bestimmter Inklination β, bestimmter Reklination γ u. s. w. gegeben (wird also vorausgesetzt, dass die Exponenten der nicht ausdrücklich gegebenen neutralen Richtungskoeffizienten den Werth null haben); so ist jene erstere Unbestimmtheit, welche dem Reihenwerthe anhaftet, nicht vorhanden: die Grösse ist dann vollständig bestimmt oder eindeutig.

Eine eindeutige Operation mit einer eindeutigen Grösse giebt ein eindeutiges Resultat. Die Wurzelausziehung von reellem Grade n ist eine eindeutige Operation: die n-te Wurzel einer eindeutigen Grösse hat daher nur einen einzigen Werth. So hat die Quadratwurzel aus 4, wenn diese Zahl als eindeutige Grösse gegeben ist, nur einen einzigen bestimmten Werth. Ist festgesetzt, dass die Deklination, Inklination, Reklination u. s. w. jener Zahl null sei, ist diese Zahl also gleich $4 e^{0i} e^{0i_1} e^{0i_2} \ldots$; so ist ihre Quadratwurzel eindeutig gleich

$$2 e^{0i} e^{0i_1} e^{0i_2} \ldots \text{ also } = +2 \text{ und nicht } = -2.$$

Wenn dagegen eine Grösse nur nach ihrem Reihenwerthe gegeben ist; so ist sie vieldeutig, weil ihre Deklination, Inklination, Reklination u. s. w. um jedes beliebige ganze Vielfache von 2π vergrössert oder verkleinert werden kann. Demnach ist jede in der einfachen Form einer reellen Grösse a oder in der Form der komplexen Grösse $a + bi$ oder in der Form der triplexen Grösse $a + bi + cii_1$ und überhaupt in der abgekürzten Form $a + bi + cii_1 + dii_1 i_2 +$ etc. gegebene Grösse, weil hierdurch nur ihr Reihenwerth gegeben ist, während ihr Verhältnisswerth nicht vollständig gegeben ist, vieldeutig. Demzufolge ist auch die n-te Wurzel aus einer solchen Grösse vieldeutig. Während die auf ganzen Umdrehungen beruhenden Werthe einer vieldeutigen Grösse sich geometrisch decken, haben die Resultate mancher Operationen mit denselben, unter Anderem die Wurzeln aus denselben verschiedene Werthe. Über die Anzahl dieser verschiedenen Werthe bestehen übrigens grosse Irrthümer. Da das Minuszeichen nur das zweidimensionale Grössengebiet erschliesst; so stellen die komplexen Grössen nur diejenigen Werthe einer Wurzel dar, welche dem zweidimensionalen Gebiete angehören. In diesem Gebiete liegen n verschiedene Werthe der n-ten Wurzel aus jeder reellen oder komplexen Zahl $x + yi$. Denn diese Zahl kann jeden der in der Form $a e^{(\alpha + 2r\pi)i}$ enthaltenen, sich deckenden Werthe, ihre Wurzel also jeden der in der Form $a^{\frac{1}{n}} e^{\frac{\alpha + 2r\pi}{n} i}$ enthaltenen Werthe

$$a^{\frac{1}{n}} e^{\frac{\alpha}{n} i}, \quad a^{\frac{1}{n}} e^{\frac{\alpha + 2\pi}{n} i}, \quad a^{\frac{1}{n}} e^{\frac{\alpha + 4\pi}{n} i} \cdots a^{\frac{1}{n}} e^{\frac{\alpha + 2(n-1)\pi}{n} i}$$

haben.

An der Zahl $x + yi$ und, allgemeiner, an der Zahl

$$x + yi + zii_1 + uii_1i_2 + \cdots$$

ist aber nicht bloss die Deklination, sondern auch die Inklination, Reklination u. s. w. vieldeutig; die n-te Wurzel daraus ist also in der Formel

$$a^{\frac{1}{n}} e^{\frac{\alpha + 2r\pi}{n} i} e^{\frac{\beta + 2s\pi}{n} i_1} e^{\frac{\gamma + 2t\pi}{n} i_2} \cdots$$

enthalten. Hieraus folgt, dass die n-te Wurzel jeder als Reihengrösse gegebenen Zahl unendlich viel verschiedene Werthe hat, von welchen

1 Werth in der Form $a^{\frac{1}{n}} e^{\frac{\alpha}{n} i} e^{\frac{\beta}{n} i_1} e^{\frac{\gamma}{n} i_2} \cdots$

n Werthe in der Form $a^{\frac{1}{n}} e^{\frac{\alpha + 2r\pi}{n} i} e^{\frac{\beta}{n} i_1} e^{\frac{\gamma}{n} i_2} \cdots$

n^2 „ „ „ „ $a^{\frac{1}{n}} e^{\frac{\alpha + 2r\pi}{n} i} e^{\frac{\beta + 2s\pi}{n} i_1} e^{\frac{\gamma}{n} i_2} \cdots$

n^3 „ „ „ „ $a^{\frac{1}{n}} e^{\frac{\alpha + 2r\pi}{n} i} e^{\frac{\beta + 2s\pi}{n} i_1} e^{\frac{\gamma + 2t\pi}{n} i_2} \cdots$

u. s. w. enthalten sind.

Die n-te Wurzel einer positiven reellen Zahl a hat hiernach einen positiven Werth $a^{\frac{1}{n}}$, n zweidimensionale Werthe $a^{\frac{1}{n}} e^{\frac{2r\pi}{n} i}$, n^2 dreidimensionale Werthe $a^{\frac{1}{n}} e^{\frac{2r\pi}{n} i} e^{\frac{2s\pi}{n} i_1}$ u. s. w. Die beiden Werthe einer Quadratwurzel, welche die Arithmetik bis jetzt kennt, sind die dem zweidimensionalen Gebiete angehörigen Werthe

$$a^{1/2} e^{\pi i} = +\sqrt{a},\ a^{1/2} e^{2\pi i} = -\sqrt{a}$$

Zieht man das dreidimensionale Gebiet in Betracht; so ist die Quadratwurzel nicht zweideutig, sondern vierdeutig und ihre Werthe sind

$$a^{1/2} e^{\pi i} e^{\pi i_1} = - \div \sqrt{a} \qquad a^{1/2} e^{\pi i} e^{2\pi i_1} = - \dotplus \sqrt{a}$$

$$a^{1/2} e^{2\pi i} e^{\pi i_1} = + \div \sqrt{a} \qquad a^{1/2} e^{2\pi i} e^{2\pi i_1} = + \dotplus \sqrt{a}$$

Die 9 dreidimensionalen Werthe der Kubikwurzel der reellen Grösse 1 sind die schon im Situationskalkul S. 175 aufgeführten:

$$e^{\frac{2\pi}{3}i}\, e^{\frac{2\pi}{3}i_1} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}\sqrt{-1} + \frac{3}{4}\sqrt{-1}\sqrt{\div 1}$$

$$e^{\frac{2\pi}{3}i}\, e^{\frac{4\pi}{3}i_1} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}\sqrt{-1} - \frac{3}{4}\sqrt{-1}\sqrt{\div 1}$$

$$e^{\frac{2\pi}{3}i}\, e^{2\pi i_1} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{-1}$$

$$e^{\frac{4\pi}{3}i}\, e^{\frac{2\pi}{3}i_1} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}\sqrt{-1} - \frac{3}{4}\sqrt{-1}\sqrt{\div 1}$$

$$e^{\frac{4\pi}{3}i}\, e^{\frac{4\pi}{3}i_1} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}\sqrt{-1} + \frac{3}{4}\sqrt{-1}\sqrt{\div 1}$$

$$e^{\frac{4\pi}{3}i}\, e^{2\pi i_1} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{-1}$$

$$e^{2\pi i}\, e^{\frac{2\pi}{3}i_1} = 1$$

$$e^{2\pi i}\, e^{\frac{4\pi}{3}i_1} = 1$$

$$e^{2\pi i}\, e^{2\pi i_1} = 1$$

Die letzten drei Wurzeln sind nur in der abgekürzten Form, nicht in der vollständigen Form einander gleich, d. h. sie sind nicht äquipollent.

Die Vieldeutigkeit, welche bis jetzt in der Arithmetik zur Geltung kömmt, stützt sich auf die Möglichkeit mehrmaliger ganzer Umdrehungen, Umwälzungen, Umwendungen u. s. w. Zwei Grössen können aber in allgemeinerer Weise, nämlich auch durch halbe Umdrehungen unter Kombination mit entgegengesetzten Drehungen zur Deckung gebracht werden. So führt die Deklination α bei der Inklination β in dieselbe Richtung wie die Deklination $-\alpha$ bei der Inklination $\pi + \beta$ oder $-(\pi - \beta)$, d. h. die Grösse $e^{\alpha i}\, e^{\beta i_1}$ deckt die Grösse $e^{-\alpha i}\, e^{(\pi+\beta) i_1}$ oder beide haben dieselbe abgekürzte Form $x + yi + z\, i\, i_1$. Es ist wichtig, die Deklination, Inklination, Reklination u. s. w. aller sich deckenden zwei-, drei-, vierdimensionalen Grössen zu bestimmen, also aller Werthe von $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots$, durch welche die Grösse $e^{\alpha i}\, e^{\beta i_1}\, e^{\gamma i_2}\, e^{\delta i_3} \ldots$ denselben abgekürzten Werth

$$x + yi + z\, i\, i_1 + u\, i\, i_1\, i_2 + \cdots$$

annimmt, oder für welche die Grössen

$$\cos\alpha,\ \sin\alpha\,\cos\beta,\ \sin\alpha\,\sin\beta\,\cos\gamma,\ \sin\alpha\,\sin\beta\,\sin\gamma\,\cos\delta,$$

und wenn δ der letzte Winkel ist, auch $\sin\alpha\,\sin\beta\,\sin\gamma\,\sin\delta$ ihre Zeichen behalten. Man findet, dass folgende Werthe dieser Bedingung genügen.

Für dreidimensionale Grössen

$$\begin{array}{cc} \alpha & -\alpha \\ \beta & \pi + \beta \end{array}$$

für vierdimensionale Grössen

$$\begin{array}{cccc} \alpha & -\alpha & \alpha & -\alpha \\ \beta & \pi+\beta & -\beta & \pi-\beta \\ \gamma & \gamma & \pi+\gamma & \pi+\gamma \end{array}$$

für fünfdimensionale Grössen

$$\begin{array}{cccccccc} \alpha & -\alpha & \alpha & -\alpha & \alpha & -\alpha & \alpha & -\alpha \\ \beta & \pi+\beta & -\beta & \pi-\beta & \beta & \pi+\beta & -\beta & \pi-\beta \\ \gamma & \gamma & \pi+\gamma & \pi+\gamma & -\gamma & -\gamma & \pi-\gamma & \pi-\gamma \\ \delta & \delta & \delta & \delta & \pi+\delta & \pi+\delta & \pi+\delta & \pi+\delta \end{array}$$

Für höhere Gebiete lassen sich diese Tabellen leicht in folgender Weise fortsetzen. Wenn die Tabelle für irgend ein Gebiet, z. B. für das fünfdimensionale hergestellt ist, ergiebt sich die Tabelle für das nächst höhere Gebiet, indem zunächst unter die letzte Tabelle der dem nächsten Gebiete angehörige Winkel ε gesetzt wird. Hierdurch erhält man ebensoviel Gruppen wie in der letzten Tabelle. Diese Anzahl verdoppelt sich, indem man in den hergestellten Gruppen den vorletzten Winkel γ negativ nimmt und dann als letzten Winkel $\pi + \delta$ setzt.

Eine jede zusammengehörige Gruppe von Winkeln α, β, γ, δ stellt einen Fundamentalwerth des Richtungskoeffizienten $e^{\alpha i}\, e^{\beta i_1}\, e^{\gamma i_2}\, e^{\delta i_3}$ dar. Man hat also im zweidimensionalen Gebiete eine, im dreidimensionalen Gebiete zwei, im vierdimensionalen Gebiete vier, im fünfdimensionalen Gebiete acht und, allgemein, im m-dimensionalen Gebiete 2^{m-2} Fundamentalwerthe des Richtungskoeffizienten, welcher einunddieselbe Fortschrittsrichtung deckt. In jedem dieser Fundamentalwerthe kann nun jeder Winkel noch um eine beliebige Anzahl ganzer Umdrehungen vergrössert oder verkleinert werden.

Durch die verschiedenen Fundamentalwerthe einer als Fortschrittsgrösse gegebenen Zahl wird die Vieldeutigkeit der Funktionen ungemein vermehrt. So hat z. B. die komplexe Grösse $x + yi$ im zweidimensionalen Gebiete allerdings nur einen Fundamentalwerth $a\, e^{\alpha i}$, welcher die Werthe $a\, e^{(\alpha + 2r\pi)i}$ deckt. Als Angehöriger des dreidimensionalen Gebietes hat sie jedoch zwei Fundamentalwerthe

$$a\, e^{\alpha i}\, e^{0 i_1} \text{ und } a\, e^{-\alpha i}\, e^{(\pi+\beta) i_1}$$

welche jene Grösse und zugleich alle Grössen von der Form

$$a\, e^{(2r\pi+\alpha) i}\, e^{2s\pi i_1} \text{ und } a\, e^{(2r\pi-\alpha) i}\, e^{[(2s+1)\pi+\beta] i_1}$$

decken.

Die Fundamentalwerthe, obwohl sie sich in ihren Fortschrittswerthen decken, unterscheiden sich doch durch ihre Verhältnisswerthe ganz wesentlich sowohl voneinander, als auch von den durch den Zusatz mehrmaliger ganzer Umdrehungen erzeugten Grössen. Während nämlich die letzteren

bei der Wurzelausziehung, nicht aber bei der Multiplikation mit demselben Faktor verschiedene, sich nicht deckende Werthe annehmen, liefern die Fundamentalwerthe schon bei der Multiplikation mit demselben Faktor verschiedene, sich nicht deckende Werthe. So geben zwei Fundamentalwerthe mit der Grösse $e^{\phi i} e^{\psi i_1}$ die ganz verschiedenen Produkte

$$a e^{\alpha i} e^{\beta i_1} \times e^{\phi i} e^{\psi i_1} = a e^{(\alpha + \phi) i} e^{(\beta + \psi) i_1}$$
$$a e^{-\alpha i} e^{(\pi + \beta) i_1} \times e^{\phi i} e^{\psi i_1} = a e^{(\phi - \alpha) i} e^{(\pi + \beta + \psi) i_1}$$

Zwei Fundamentalwerthe, obwohl sie sich decken, stehen zueinander doch nicht im Verhältnisse 1, vielmehr hat man

$$\frac{a e^{\alpha i} e^{\beta i_1}}{a e^{-\alpha i} e^{(\pi + \beta) i_1}} = e^{2\alpha i} e^{-\pi i_1}$$

Auch das Produkt zweier Fundamentalwerthe ist nicht dem Quadrate des einen gleich, vielmehr ist

$$a e^{\alpha i} e^{\beta i_1} \times a e^{-\alpha i} e^{(\pi + \beta) i_1} = a^2 e^{(\pi + 2\beta) i_1}$$

Die Vieldeutigkeit der Fortschrittsgrössen ist die alleinige Ursache, dass eine Gleichung vom n-ten Grade mehr als eine Wurzel hat. Man kann die Wurzeln der Gleichung $x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$, worin die Koeffizienten a_1, a_2 . . . a_n als reelle, komplexe, triplexe oder überhaupt als Fortschrittsgrössen gegeben sind, auf zwei Wegen herstellen. Lässt sich diese Gleichung generell auflösen, lässt sich also aus ihren Koeffizienten die allgemeine Funktion $x = F(a_1, a_2 \ldots a_n)$ herstellen, welche dieser Gleichung genügt; so liefert diese Funktion alle Auflösungen, wenn man darin für jede der Grössen $a_1, a_2 \ldots a_n$ nach und nach alle dieselbe deckenden Werthe substituirt. Das zweite Verfahren besteht darin, für x die allgemeine Zahlform $r e^{\phi i} e^{\psi i_1} e^{\chi i_2} \ldots$ zu setzen, und die verschiedenen möglichen Werthe von r, φ, ψ, $\chi \ldots$ zu bestimmen, welche der gegebenen Gleichung genügen. Solange man nur an komplexe Grössen denkt, also $x = r e^{\phi i} = r \cos\varphi + r \sin\varphi \,.\, i$ setzt, erhält man durch das letztere Verfahren aus der gegebenen Gleichung, falls alle Koeffizienten reell sind, indem man das Reelle für sich und das Imaginäre für sich gleich null setzt, die beiden Gleichungen

$$r^n \cos n\varphi + a_1 r^{n-1} \cos(n-1)\varphi + \cdots + a_n = 0$$
$$r^{n-1} \sin n\varphi + a_1 r^{n-2} \sin(n-1)\varphi + \cdots + a_{n-1} = 0$$

woraus sich n Auflösungen entwickeln.

Die Anzahl der Auflösungen vermehrt sich jedoch bedeutend, sobald ausser den zweidimensionalen, auch die dreidimensionalen Werthe von x betrachtet, dann wieder, sobald man auch die vierdimensionalen Werthe zulässt u. s. f. Für dreidimensionale Werthe $x = r e^{\phi i} e^{\psi i_1}$ ergeben sich durch Trennung und Annullirung des Reellen, des Imaginären und des Überimaginären die drei Bedingungsgleichungen

$$r^n \cos n\varphi + a_1 r^{n-1} \cos(n-1)\varphi + \cdots + a_n = 0$$
$$r^{n-1} \sin n\varphi \,.\, \cos n\psi + a_1 r^{n-2} \sin(n-1)\varphi \,.\, \cos(n-1)\psi + \cdots + a_{n-1} = 0$$
$$r^{n-1} \sin n\varphi \,.\, \sin n\psi + a_1 r^{n-2} \sin(n-1)\varphi \,.\, \sin(n-1)\psi + \cdots + a_{n-1} = 0$$

Wenn die Koeffizienten der gegebenen Gleichung nicht sämmtlich reell sind, ergiebt die Zerlegung in einen reellen, imaginären und überimaginären Theil andere Bedingungsgleichungen. So erhält man z. B. durch Auflösung der Gleichung

$$x^2 = a + bi + cii_1$$

den Werth der Quadratwurzel aus der triplexen Grösse $\sqrt{a + bi + cii_1}$ vermöge der drei Bedingungen

$$r^2 \cos 2\varphi = a \quad r^2 \sin 2\varphi \,.\, \cos 2\psi = b \quad r^2 \sin 2\varphi \sin 2\psi = c$$

Dieselben erfüllen sich durch die Werthe

$$r = \sqrt[4]{a^2 + b^2 + c^2}$$
$$\cos 2\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \qquad \sin 2\varphi = \frac{\sqrt{b^2 + c^2}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$
$$\cos 2\psi = \frac{b}{\sqrt{b^2 + c^2}} \qquad \sin 2\psi = \frac{c}{\sqrt{b^2 + c^2}}$$

Bezeichnet α einen diesen Bedingungen genügenden Werth von 2φ und β einen Werth von 2ψ; so hat man allgemein

$$2\varphi = \alpha + 2m\pi, \quad 2\psi = \beta + 2n\pi$$

ausserdem aber auch als zweiten Fundamentalwerth

$$2\varphi = -\alpha + 2m\pi, \quad 2\psi = \beta + \pi + 2n\pi$$

Die Auflösungen sind also in der Form

$$\varphi = \frac{\alpha}{2} + m\pi, \quad \psi = \frac{\beta}{2} + n\pi$$

und in der Form

$$\varphi = -\frac{\alpha}{2} + m\pi, \quad \psi = \frac{\beta}{2} + \frac{\pi}{2} + n\pi$$

enthalten.

Diess giebt folgende 8 Werthe von φ und ψ

$\varphi =$	$\frac{\alpha}{2}$	$\frac{\alpha}{2}$	$\frac{\alpha}{2}+\pi$	$\frac{\alpha}{2}+\pi$	$-\frac{\alpha}{2}$	$-\frac{\alpha}{2}$	$-\frac{\alpha}{2}+\pi$	$-\frac{\alpha}{2}+\pi$
$\psi =$	$\frac{\beta}{2}$	$\frac{\beta}{2}+\pi$	$\frac{\beta}{2}$	$\frac{\beta}{2}+\pi$	$\frac{\beta}{2}+\frac{\pi}{2}$	$\frac{\beta}{2}+\frac{3\pi}{2}$	$\frac{\beta}{2}+\frac{\pi}{2}$	$\frac{\beta}{2}+\frac{3\pi}{2}$

Die 8 Auflösungen selbst sind

$$x = \sqrt[4]{a^2 + b^2 + c^2}\,(\cos\varphi + \sin\varphi\,\cos\psi\,.\,i + \sin\varphi\,\sin\psi\,.\,i\,i_1)$$

und der Faktor in der Klammer nimmt folgende 8 Werthe an

$$\cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\,\cos\frac{\beta}{2}\cdot i + \sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot i\,i_1$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\,\cos\frac{\beta}{2}\cdot i - \sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot i\,i_1$$

$$-\cos\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\,\cos\frac{\beta}{2}\cdot i - \sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot i\,i_1$$

$$-\cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\,\cos\frac{\beta}{2}\cdot i + \sin\frac{\alpha}{2}\,\sin\frac{\beta}{2}\cdot i\,i_1$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\,\sin\frac{\beta}{2}\cdot i - \sin\frac{\alpha}{2}\,\cos\frac{\beta}{2}\cdot i\,i_1$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\,\sin\frac{\beta}{2}\cdot i + \sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}\cdot i\,i_1$$

$$-\cos\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\,\sin\frac{\beta}{2}\cdot i + \sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}\cdot i\,i_1$$

$$-\cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\,\sin\frac{\beta}{2}\cdot i - \sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}\cdot i\,i_1$$

Wenn $c = 0$ ist, wird $x = \sqrt{a + b\,i}$. Da jetzt $\beta = 0$ wird; so werden die 8 Werthe des vorstehenden Faktors von x

$$\cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\cdot i \qquad \cos\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\cdot i$$

$$-\cos\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\cdot i \qquad -\cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\cdot i$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\cdot i\,i_1 \qquad \cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\cdot i\,i_1$$

$$-\cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\cdot i\,i_1 \qquad -\cos\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\cdot i\,i_1$$

Die Quadratwurzel einer komplexen Grösse hat also im Bereiche der dreidimensionalen Grössen acht Werthe. Hiervon sind vier Werthe komplex. In der jetzigen Arithmetik kennt man nur zwei von diesen Werthen, nämlich die beiden Werthe

$$r\,e^{\frac{\alpha}{2}i} = r\left(\cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\cdot i\right)$$

$$r\,e^{\left(\frac{\alpha}{2} + \pi\right)i} = r\left(-\cos\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\cdot i\right)$$

Die beiden anderen Werthe entsprechen den durch eine halbe Umwälzung entstandenen Grössen

$$r e^{\frac{\alpha}{2} i} e^{\pi i_1} = r \left(cos \frac{\alpha}{2} - sin \frac{\alpha}{2} \cdot i \right)$$

$$r e^{\left(\frac{\alpha}{2} + \pi\right) i} e^{\pi i_1} = r \left(- cos \frac{\alpha}{2} + sin \frac{\alpha}{2} \cdot i \right)$$

Wenn $b = 0$ und $c = 0$; so wird $\alpha = 0$ und $\beta = 0$; die Quadratwurzel einer positiven reellen Zahl a hat also im dreidimensionalen Gebiete nur zwei Werthe $\pm \sqrt{a}$.

Wir heben noch hervor, dass die goniometrischen Funktionen $sin\,\alpha$, $cos\,\alpha$, $tang\,\alpha$ u. s. w. Verhältnisse zwischen Fortschrittsgrössen oder zwischen Koordinaten darstellen, und dass, wenn eine solche Funktion als das Verhältniss einer Linie zur Längeneinheit aufgefasst wird, diese Längeneinheit doch auch nur als eine Fortschrittsgrösse gedacht wird. Man könnte immer noch $sin\,\alpha = sin\,\alpha \,.\, e^{2m\pi i} e^{2n\pi i_1} \ldots$ setzen. Hierdurch würden manche Funktionen von $sin\,\alpha$, $cos\,\alpha$, $tang\,\alpha$ u. s. w. vieldeutig werden, welche sonst nicht dafür gehalten werden. Da jedoch die goniometrischen Funktionen auf der Definition beruhen, welche der unmittelbaren Anschauung der Projektion auf gewisse Koordinatenaxen entspricht; so wird es zulässig sein, im Interesse der Vereinfachung der Formeln jene Funktionen als Fortschrittsgrössen mit annullirter Deklination, Inklination, Reklination u. s. w. zu definiren, wodurch sie sämmtlich eindeutig werden.

§. 6.

Das Raumpolygon.

Jede zusammenhängende Linienfigur kann als das Resultat eines ununterbrochenen linearen Fortschritts angesehen, folglich als ein Aggregat von Seiten, welche die Form $a e^{\alpha i} e^{\alpha_1 i_1}$ haben und durch primäre Addition verbunden sind, dargestellt werden. Dabei muss übrigens in manchen Fällen einunddieselbe Seite mehrmals in derselben oder auch in entgegengesetzten Richtungen durchlaufen werden. So kann z. B. die Sternfigur in Fig. 20 ohne Unterbrechung in der Reihenfolge der Buchstaben $OA\,OB\,O\,C\,O$ durchlaufen, also, wenn nach Länge und Richtung $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$ ist, als das Aggregat $a - a + b - b + c - c$ dargestellt werden.

Im Allgemeinen erscheinen hiernach die durch linearen Fortschritt entstandenen Raumpolygone als Figuren mit mehrfachen Seiten. So nützlich diese Darstellung für gewisse Zwecke ist, so wichtig ist es doch auch,

der gleichzeitigen einfachen linearen Ausdehnung in verschiedenen Richtungen des Raumes einen arithmetischen Ausdruck geben, d. h. diese

Fig. 20.

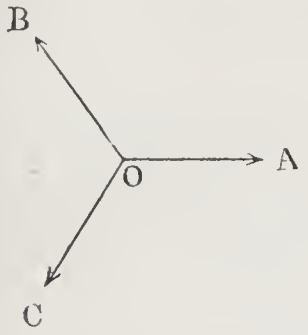


Fig. 21.

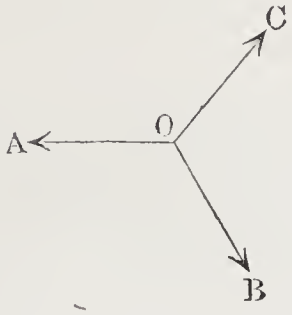
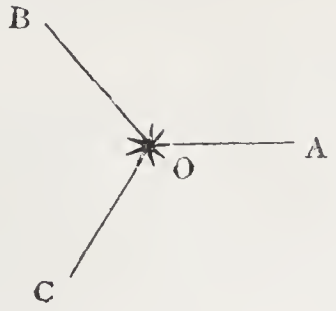


Fig. 22.



räumliche Gleichzeitigkeit in abstrakten Begriffen denken zu können. Diess nun geschieht durch die sekundäre Addition, indem dieselbe eine aus demselben Anfangspunkte O entspringende Strahlenfigur durch die einfache Formel $a \dot{+} b \dot{+} c$ darstellt. So ist z. B. der gleicharmige Stern in Fig. 20, dessen Strahlen sich unter gleichen Winkeln in der Grundebene gegeneinander neigen, durch

$$a \dot{+} a e^{2/3 \pi i} \dot{+} a e^{4/3 \pi i}$$

dargestellt, wobei O als Anfangspunkt gilt. Die negativen Werthe von a, b, c geben den Stern 21 mit entgegengesetzt gerichteten Strahlen nach der Formel $d\ (-a) \dot{+} (-b) \dot{+} (-c)$. Soll aber O Endpunkt sein, sollen also die Strahlen von A, B, C gegen O hin schiessen; so ist die Formel des Sternes 22 gleich $-(a \dot{+} b \dot{+} c)$ zu setzen.

Wird der in O entspringende Stern durch die Grenzfigur ABC geschlossen (Fig. 23); so entsteht die Verbindung einer sekundären mit einer primären Summe nach der Formel

$$(a \dot{+} b \dot{+} c) + (d + e + f)$$

wobei die Voraussetzung gemacht ist, dass sich das erste Glied d der primären Summe, welches die Seite CA repräsentirt, an das letzte Glied e der sekundären Summe anreiht.

Fig. 23.

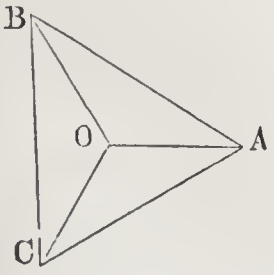


Fig. 24.

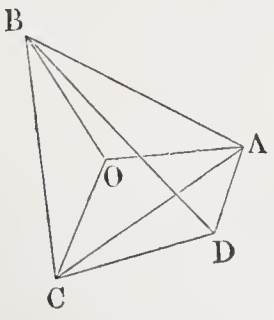
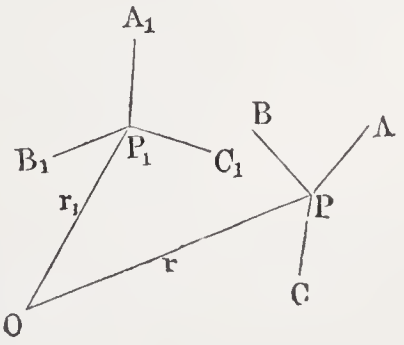


Fig. 25.



Wäre das Polygon CAB zuerst darzustellen und daran ein Stern mit umgekehrten Strahlrichtungen zu schliessen; so hätte man

$$(d + e + f) - (c \dot{+} b \dot{+} a)$$

Schlösse sich an das Polygon CAB in Fig. 23 ein zweiter Stern mit der Spitze D in Fig. 24; so kann man die Doppelpyramide $OABCD$ durch die Formel

$$(a \dotplus b \dotplus c) + (d + e + f) - (g \dotplus h \dotplus k)$$

darstellen.

Wenn der Anfang O des Sternes $a \dotplus b \dotplus c$ in die Entfernung r gerückt wird; so erhält man den Stern am Vektor r in Fig. 25 nach der Formel $r + (a \dotplus b \dotplus c)$. Wird ein zweiter, dritter Stern mit beliebig viel Strahlen resp. in der Entfernung r_1, r_2 vom Nullpunkt O aufgestellt; so können alle zusammen auf einmal nach der Formel

$$[r + (a \dotplus b \dotplus c)] \dotplus [r_1 + (a_1 \dotplus b_1 \dotplus c_1)] \dotplus [r_2 + (a_2 \dotplus b_2 \dotplus c_2)]$$

gedacht werden. Sind also P, P_1, P_2 die Ecken, PA, PB, PC, P_1A_1 etc. die Kanten eines Polyeders und O irgend ein Punkt im Raume; so ist die letzte Formel der einfachste Ausdruck für jedes beliebige Raumpolygon, und es leuchtet ein, dass unter den Grössen a, b, c, a_1, b_1, c_1 etc. jede Seite des Polygons einmal mit positivem und einmal mit negativem Zeichen vorkömmt.

Wenn man den Kreisumfang in der Grundebene XY von der Grundaxe OX aus in n gleiche Winkel eintheilt; so erhält man die n Richtungen, deren Richtungskoeffizienten

$$e^{0\,i} \quad e^{\frac{1}{n}2\pi i} \quad e^{\frac{2}{n}2\pi i} \quad \ldots \quad e^{\frac{n-1}{n}2\pi i}$$

sind. Wälzt man die Grundebene mit diesen n Richtungen um die Grundaxe OX und hält dieselbe bei jedem n-tel der ganzen Umwälzung an; so tritt jede jener n Richtungslinien in n verschiedene Richtungen ein, man erhält also n^2 Richtungen mit den Richtungskoeffizienten

$$\begin{array}{llll}
e^{0\,i}\,e^{0\,i_1} & e^{\frac{1}{n}2\pi i}\,e^{0\,i_1} & e^{\frac{2}{n}2\pi i}\,e^{0\,i_1} & \ldots\ e^{\frac{n-1}{n}2\pi i}\,e^{0\,i_1} \\
e^{0\,i}\,e^{\frac{1}{n}2\pi i_1} & e^{\frac{1}{n}2\pi i}\,e^{\frac{1}{n}2\pi i_1} & e^{\frac{2}{n}2\pi i}\,e^{\frac{1}{n}2\pi i_1} & \ldots\ e^{\frac{n-1}{n}2\pi i}\,e^{\frac{1}{n}2\pi i_1} \\
e^{0\,i}\,e^{\frac{2}{n}2\pi i} & e^{\frac{1}{n}2\pi i}\,e^{\frac{2}{n}2\pi i_1} & e^{\frac{2}{n}2\pi i}\,e^{\frac{1}{n}2\pi i_1} & \ldots\ e^{\frac{n-1}{n}2\pi i}\,e^{\frac{2}{n}2\pi i_1} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
e^{0\,i}\,e^{\frac{n-1}{n}2\pi i_1} & e^{\frac{1}{n}2\pi i}\,e^{\frac{n-1}{n}2\pi i_1} & e^{\frac{2}{n}2\pi i}\,e^{\frac{n-1}{n}2\pi i_1} & \ldots\ e^{\frac{n-1}{n}2\pi i}\,e^{\frac{n-1}{n}2\pi i_1}
\end{array}$$

Wird der Vorbehalt gemacht, dass jeder Richtungskoeffizient sowohl mit positivem, als auch mit negativem Zeichen zugelassen werden soll; so ist es nicht nöthig, den ganzen Umfang 2π zu theilen, man braucht dann nur den halben Umfang π ins Auge zu fassen, um ihn in n gleiche Theile zu zerlegen. In dieser Voraussetzung setzen wir in den letzten Formeln π an die Stelle von 2π und schreiben zur Abkürzung irgend einen beliebigen Richtungskoeffizienten

$$e^{\frac{r}{n}\pi i}\, e^{\frac{s}{n}\pi i_1} = \varrho^r \sigma^s$$

Denkt man sich aus beliebigen positiven und negativen Längen, welche die vorstehenden Richtungen haben, ein Polygon gebildet; so wird dasselbe durch die Funktion

$$\Sigma a \varrho^r \sigma^s$$

dargestellt sein, worin a für jedes Glied irgend einen positiven oder negativen reellen Werth hat, der natürlich auch null sein kann. Werden alle Glieder mit gleichen Richtungskoeffizienten zusammengezogen; so kann die Formel nicht mehr als n^2 Glieder enthalten.

Es leuchtet ein, dass jede Summe, jede Differenz und jedes Produkt aus Funktionen von der Form Σ wiederum dieselbe Form hat, indem bei der Multiplikation solcher Funktionen keine anderen als die obigen n^2 Richtungskoeffizienten entstehen können, alle Glieder des Produktes sich also auf n^2 Glieder mit jenen Koeffizienten und reellen Faktoren zusammenziehen. Aber auch ein Quotient aus solchen Funktionen erscheint in derselben Form, da man stets

$$\frac{\Sigma a \varrho^r \sigma^s}{\Sigma b \varrho^r \sigma^s} = \Sigma c \varrho^r \sigma^s$$

oder

$$\Sigma a \varrho^r \sigma^s = \Sigma b \varrho^r \sigma^s \,.\, \Sigma c \varrho^r \sigma^s$$

durch reelle Werthe von c und durch Richtungskoeffizienten von c, welche mit den obigen übereinstimmen, realisiren kann.

Wenn man unter den Richtungskoeffizienten der Glieder, aus welchen die Funktionen Σ gebildet werden sollen, eine gewisse Auswahl trifft, kann die Gliederzahl erheblich vermindert werden. Die wichtigste Auswahl ist diejenige, welche nur solche Richtungskoeffizienten zulässt, in denen die Deklination r und die Inklination s eine konstante Differenz $s - r = \delta$ bildet. Hierdurch reduzirt sich die Gliederzahl auf n mit den Richtungskoeffizienten

$$\sigma^\delta \quad \varrho\, \sigma^{\delta+1} \quad \varrho^2 \sigma^{\delta+2} \ldots \varrho^{n-1} \sigma^{\delta+n-1}$$

Das Produkt zweier Funktionen von je n Gliedern, welchen resp. die Differenz $s - r = \delta$ und $s - r = \varepsilon$ zukömmt, ist eine ähnliche Funktion von n Gliedern, welchen jedoch die Differenz $s - r = \delta + \varepsilon$ zukömmt. Der Quotient zweier solcher Funktionen ist eine Funktion von n Gliedern mit der Differenz $s - r = \delta - \varepsilon$.

Von besonderem Interesse ist der Fall, wo die Deklination der Inklination gleich, also die Differenz $s - r = \delta = 0$ ist. Alsdann ist auch $\varepsilon = 0$, also $\delta + \varepsilon = 0$ und $\delta - \varepsilon = 0$. Wenn daher die n Glieder einer jeden Funktion die Richtungskoeffizienten

$$1 \quad \varrho\, \sigma \quad \varrho^2 \sigma^2 \ldots \varrho^{n-1} \sigma^{n-1}$$

haben, ist jede Summe, jede Differenz, jedes Produkt und jeder Quotient aus solchen Funktionen immer wieder eine solche Funktion. So ist z. B. für $n = 3$

$$\frac{a + a_1 e^{1/3\pi i} e^{1/3\pi i_1} + a_2 e^{2/3\pi i} e^{2/3\pi i_1}}{b + b_1 e^{1/3\pi i} e^{1/3\pi i_1} + b_2 e^{2/3\pi i} e^{2/3\pi i_1}}$$
$$= c + c_1 e^{1/3\pi i} e^{1/3\pi i_1} + c_2 e^{2/3\pi i} e^{2/3\pi i_1}$$

Der letztere Satz gilt offenbar ganz allgemein für Funktionen, deren Richtungskoeffizienten aus Deklinations-, Inklinations-, Reklinations- und beliebigen höheren Koeffizienten zusammengesetzt sind. Eine solche Funktion lässt sich immer auf ein abgekürztes Aggregat projiziren, welches nicht mehr Glieder, als der Koeffizient $1\,\varrho\,\sigma\,\tau\ldots$ Faktoren hat. So ist die Projektion jeder Funktion, deren Glieder den Richtungskoeffizienten $1\,\varrho\,\sigma$ haben, dreigliederig und man hat in dem letzten Beispiele, abgekürzt,

$$c + c_1 e^{1/3\pi i} e^{1/3\pi i_1} + c_2 e^{2/3\pi i} e^{2/3\pi i_1} = (c + c_1 \cos 1/3\,\pi + c_2 \cos 2/3\,\pi)$$
$$+ (c_1 \sin 1/3\,\pi \cos 1/3\,\pi + c_2 \sin 2/3\,\pi \cos 2/3\,\pi)i$$
$$+ (c_1 \sin 1/3\,\pi \sin 1/3\,\pi + c_2 \sin 2/3\,\pi \sin 2/3\,\pi)\,i\,i_1$$

§. 7.

Die ganzen, die gebrochenen und die irrationalen Zahlen.

Der Begriff einer ganzen reellen Zahl ist nicht zweifelhaft; ebenso wenig der einer ganzen komplexen Zahl. Man versteht unter der letzteren stets eine aus einem ganzen reellen und einem ganzen imaginären Theile bestehende Zahl, also eine Zahl von der Form $a + bi$, worin a und b ganze reelle Werthe haben. Die Quantität $\sqrt{a^2 + b^2}$ einer ganzen komplexen Zahl ist im Allgemeinen unganz und zwar irrational. Diese Quantität vertritt geometrisch die Länge des vom Anfangspunkte des rechtwinklig gebrochenen Linienzuges $a + bi$ nach dessen Endpunkte gezogenen Vektors r. Sieht man diesen Vektor als die gegebene Grösse an; so sind a und b seine rechtwinkligen Koordinaten. Die ganzen komplexen Zahlen vertreten also die Linien in der Grundebene mit ganzen Koordinaten.

Dass man statt der ganzen komplexen Zahlen auch solche betrachten kann, deren Quantität $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ einen ganzen Werth hat, ist selbstverständlich. Solche Zahlen mit ganzem absoluten Werthe haben aber im Allgemeinen unganze und zwar irrationale Theile, resp. Koordinaten, indem, wenn eine solche Zahl den vollständigen Werth $re^{\alpha\sqrt{-1}}$ hat, $a = r\cos\alpha$ und $b = r\sin\alpha$, mithin irrational ist.

Zu den Zahlen der letzteren Art gehören die idealen Primfaktoren und überhaupt die Idealzahlen, sowie die Wurzeln der Einheit von ganzen Graden s in der Form

$$\sqrt[s]{1} = 1^{\frac{1}{s}} = e^{\frac{2n\pi}{s}} = cos\frac{2n\pi}{s} + sin\frac{2n\pi}{s} \cdot i$$

worin man für n jede beliebige ganze Zahl setzen kann. Alle diese Einheitswurzeln sind unganz mit einziger Ausnahme der Quadratwurzel, für welche $1^{1/2} = cos\, n\pi + sin\, n\pi \,.\, i = \pm 1$, also stets ganz ist.

Die idealen Zahlen, welche aus Einheitswurzeln von ganzen Graden oder auch aus den Wurzeln ϑ einer algebraischen Gleichung von ganzem Grade durch beliebige Wiederholung nach der Formel $a_0 + a_1\vartheta + a_2\vartheta^2 + \ldots$ gebildet worden, sind hiernach, obwohl man sie in der neueren Zeit ganze Zahlen zu nennen pflegt, keine ganzen Zahlen in dem Sinne, wie die reellen und die komplexen ganzen Zahlen es sind.

Wenn man von solchen idealen Zahlen nur Grundpolynome, also nur solche in Betracht zieht, welche einer einfachen Grösse äquipollent sind; so leuchtet ein, dass jedes Produkt und jeder Quotient aus solchen Polynomen wieder ein Grundpolynom, also wieder einer einfachen Grösse äquipollent ist, indem man

$$ae^{\alpha i}e^{\alpha_1 i_1} \times be^{\beta i}e^{\beta_1 i_1} = ab \,.\, e^{(\alpha+\alpha_1 i)}e^{(\beta+\beta_1)i_1}$$

$$ae^{\alpha i}e^{\alpha_1 i_1} : be^{\beta i}e^{\beta_1 i_1} = \frac{a}{b} \cdot e^{(\alpha-\alpha_1)i}e^{(\beta=\beta_1)i_1}$$

hat. Da die Quantität des Produktes und des Quotienten zweier einfachen Grössen dem Produkte und dem Quotienten der Quantitäten dieser Grössen gleich ist, während die Deklinations-, Inklinations-, Reklinationswinkel sich bei der Multiplikation addiren und bei der Division subtrahiren, was einer positiven oder negativen Drehung des Multiplikands oder Dividends entspricht; so ist klar, dass viele Gesetze der ganzen reellen Zahlen auf die duplexen, triplexen, quadruplexen Zahlen mit ganzer Quantität, also auf manche idealen Zahlen Anwendung finden, insofern man der damit verbundenen Richtungsänderung Rechnung trägt. Im Allgemeinen weichen jedoch die Gesetze der idealen von denen der ganzen Zahlen ab.

Wir verlassen jetzt die Zahlen mit ganzer Quantität, wozu auch die Einheitswurzeln von ganzem Grade gehören, und wenden uns zu den Zahlen mit ganzen neutralen Gliedern, also zu den eigentlichen ganzen reellen, duplexen, triplexen, quadruplexen Zahlen. Wir betrachten auch nur solche ganzen Zahlen, welche einer einfachen Grösse von der Form $ae^{\alpha i}e^{\alpha_1 i_1}e^{\alpha_2 i_2}\ldots$ äquipollent sind, welche also, wenn sie in abgekürzter Form

$$(r) = x + yi + zii_1 + uii_1i_2$$

dargestellt sind, sich durch Multiplikation ihrer Glieder mit solchen Richtungskoeffizienten, welche keinen Austritt der betreffenden Glieder aus ihren Grundrichtungen bedingen, zu einem geordneten Grundpolygone gestalten lassen, dessen Glieder sämmtlich einfache Dichte haben.

Fassen wir zunächst die beiden ganzen triplexen Zahlen (10) und (11), worin also x, y, z, x_1, y_1, z_1 ganze reelle Werthe haben, ins Auge; so lehrt die Formel (12), dass ihr Produkt nur dann eine ganze Zahl ist, wenn diese Grössen mehreren Bedingungen entsprechen. Die erste Bedingung, welche das reelle Glied des Produktes zu einer ganzen Zahl macht, fordert, dass $\sqrt{y^2 + z^2}\ \sqrt{y_1^2 + z_1^2}$ eine ganze Zahl sei, dass also $y^2 + z^2$ die Form ab^2 und $y_1^2 + z_1^2$ die Form ab_1^2, folglich $\sqrt{y^2 + z^2}\ \sqrt{y_1^2 + z_1^2}$ die Form abb_1 habe, worin a, b, b_1 ganze Zahlen sind.

Die zweite und dritte Bedingung, welche das imaginäre und das überimaginäre Glied des Produktes zu einer ganzen Zahl macht, fordert, dass

$$\frac{(xb_1\sqrt{a} + x_1 b\sqrt{a})\ (yy_1 - zz_1)}{abb_1}$$

und

$$\frac{(xb_1\sqrt{a} + x_1 b\sqrt{a})\ (yz_1 + y_1 z)}{abb_1}$$

ganze Zahlen seien. Setzt man

$$\frac{yy_1 - zz_1}{yz_1 + y_1 z} = \frac{c}{d}$$

oder

$$yy_1 - zz_1 = cf \quad yz_1 + y_1 z = df$$

so muss

$$a(b_1 x + b x_1)^2 = c^2 + d^2$$
$$f^2 (b_1 x + b x_1)^2 = ab^2 b_1^2$$

sein. Die letzte Bedingung verlangt nothwendig, dass $a = 1$, also dass $y^2 + z^2$ ein Quadrat b^2 und $y_1^2 + z_1^2$ ein Quadrat b_1^2 sei. Hierdurch werden die letzten beiden Bedingungen

$$(b_1 x + b x_1)^2 = c^2 + d^2$$
$$f(b_1 x + b x_1) = bb_1$$

Wenn die beiden Zahlen c und d kein gemeinschaftliches Maass haben, wenn also $f = 1$ ist, muss $b_1 x + b x_1 = bb_1$, es muss also sowohl $\frac{b_1 x}{b}$, als auch $\frac{b x_1}{b_1}$ eine ganze Zahl sein. Letzteres wird sicher geschehen, wenn $b_1 = \pm b$ ist, wiewohl Diess nicht nothwendig zu geschehen braucht.

Man ersieht hieraus, dass zwei ganze triplexe Zahlen nur unter gewissen Umständen ein ganzes oder ein rationales Produkt liefern. Von Wichtigkeit ist es, gewisse Klassen von triplexen Zahlen zu bezeichnen, welche stets rationale Produkte und Quotienten liefern. Betrachten wir nur solche rationalen triplexen Zahlen $x + yi + zii_1$, für welche nicht

bloss x, y, z, sondern auch $\sqrt{y^2 + z^2} = b$ rational, also $y^2 + z^2 = b^2$ das Quadrat einer Rationalzahl ist, für welche also nicht bloss die drei Projektionen auf die drei Grundaxen, sondern auch die Projektion auf die Ebene YZ rationale Werthe haben. Sind

$$(a) = x + yi + zii_1 = ae^{\alpha i} e^{\beta i_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

$$(a_1) = x_1 + y_1 i + z_1 ii_1 = a_1 e^{\alpha_1 i} e^{\beta_1 i_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

zwei solche Zahlen (10) und (11), wofür man $y^2 + z^2 = b^2$ und $y_1^2 + z_1^2 = b_1^2$ hat; so ist nach den Beziehungen (4)

$$\cos\alpha = \frac{x}{a} \qquad \sin\alpha = \frac{b}{a} \qquad \cos\beta = \frac{y}{b} \qquad \sin\beta = \frac{z}{b} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

$$\cos\alpha_1 = \frac{x_1}{a_1} \qquad \sin\alpha_1 = \frac{b_1}{a_1} \qquad \cos\beta_1 = \frac{y_1}{b_1} \qquad \sin\beta_1 = \frac{z_1}{b_1} \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

worin jede der beiden Grössen b und b_1 für sich positiv oder negativ genommen werden kann. Sodann ist

$$\cos(\alpha \pm \alpha_1) = \frac{xx_1 \mp bb_1}{aa_1} \qquad \sin(\alpha \pm \alpha_1) = \frac{bx_1 \pm b_1 x}{aa_1} \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

$$\cos(\beta \pm \beta_1) = \frac{yy_1 \mp zz_1}{bb_1} \qquad \sin(\beta \pm \beta_1) = \frac{y_1 z \pm yz_1}{bb_1} \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

Hiernach ist das Produkt der beiden Zahlen (a) und (a_1) wie in (12)

$$(a)(a_1) = (xx_1 - bb_1) + \frac{(bx_1 + b_1 x)(yy_1 - zz_1)}{bb_1} i + \frac{(bx_1 + b_1 x)(y_1 z + yz_1)}{bb_1} ii_1 \quad . \quad . \quad (28)$$

und der Quotient derselben

$$\frac{(a)}{(a_1)} = \frac{xx_1 + bb_1}{a_1^2} + \frac{(bx_1 - b_1 x)(yy_1 + zz_1)}{a_1^2 bb_1} i + \frac{(bx_1 - b_1 x)(y_1 z - yz_1)}{a_1^2 bb_1} ii_1 \quad . \quad . \quad (29)$$

Setzt man das Produkt gleich $X + Yi + Zii_1$; so ist $Y^2 + Z^2 = (bx_1 + b_1 x)^2 = B^2$, und setzt man den Quotienten gleich $X_1 + Y_1 i + Z_1 ii_1$; so ist $Y_1^2 + Z_1^2 = \left(\frac{bx_1 - b_1 x}{a_1^2}\right)^2 = B_1^2$. Hiernach ist das Produkt und der Quotient zweier rationalen Zahlen von der gedachten Beschaffenheit nicht bloss wiederum rational, sondern auch wiederum von der nämlichen Beschaffenheit, und hieraus folgt, dass das Produkt und der Quotient aus beliebig vielen solchen rationalen Faktoren und Divisoren eine Grösse von derselben Beschaffenheit, nämlich eine Grösse ist, deren Projektionen auf die drei Grundaxen OX, OY, OZ und auf die Ebene YZ rationale Werthe haben.

Ganz ist das Produkt und der Quotient nur unter besonderen Umständen. Wäre in den beiden gegebenen Zahlen x durch b und x_1 durch b_1 theilbar; so wäre das Produkt sicher eine ganze Zahl, der Quotient aber eine Zahl mit ganzem Zähler und dem Nenner a_1^2.

Im Allgemeinen sind die Produkte und Quotienten der ganzen, sowie der rationalen triplexen Zahlen irrational, während ganze duplexe Zahlen stets ganze Produkte und im Allgemeinen rationale Quotienten liefern. Natürlich ergeben vollständige dreidimensionale ganze Zahlen von der Form (18) und (19), welche Grundpolygone darstellen, auch stets ganze Produkte (20). Das Auftreten der Irrationalzahl als Resultat der Multiplikation rationaler Faktoren ist ein beachtenswerthes Symptom für die triplexen, quadruplexen und höheren Zahlen. Da über das Wesen des Irrationalen immer noch verschiedene Ansichten herrschen; so gestatten wir uns, unsere Definition aus §. 497 S. 348 der „Naturgesetze“ hier zu reproduziren.

Es sei a irgend eine gegebene bestimmte Quantität von ganz beliebigem Werthe und n eine beliebig gewählte ganze Zahl. Indem man mit der Grösse $\frac{1}{n}$ in a dividirt, sei b der sich ergebende ganze Quotient und r der Rest, welcher $< \frac{1}{n}$ ist, für welchen man also $nr < 1$ hat. Alsdann ist

$$a = b \cdot \frac{1}{n} + r = \frac{b + nr}{n}$$

(Dieser arithmetischen Rechnung entspricht die geometrische Operation, derzufolge man auf der reellen Axe OX, auf welcher die Länge $OA = a$ gegeben ist, die Grösse $\frac{1}{n}$, welche den n-ten aliquoten Theil der Längeneinheit darstellt, ununterbrochen abmisst. Bei dieser Abmessung wird ein bestimmter Theilpunkt B vor und ein Theilpunkt C hinter den Punkt A fallen oder A wird in ein bestimmtes Intervall BC von der Länge $\frac{1}{n}$ fallen, für welches OB das b-fache der Grösse $\frac{1}{n}$ und das überschiessende Stück $BA = r$ unfehlbar $< \frac{1}{n}$ ist).

Wenn man für n nachundnach die ganzen Zahlen der aufsteigenden Reihe 1, 2, 3 ... annimmt, bis man auf einen Werth stösst, für welchen der Rest r, der immer $< \frac{1}{n}$ bleibt, gleich null wird; so können sich nur drei Fälle ereignen. Im ersten Falle liegt der kleinstmögliche Werth von n, für welchen die Division mit $\frac{1}{n}$ in a aufgeht, im Anfange

der Reihe oder ist die Einheit 1 selbst, sodass der Divisor $\frac{1}{n}$ den grösstmöglichen Werth 1 hat: in diesem Falle ist $a = b \,.\, 1$ eine ganze Zahl. Im zweiten Falle liegt der kleinste Werth von n in irgend einem Mittelgliede der Reihe oder hat einen endlichen Werth >1, während der Divisor $\frac{1}{n}$ ein endlicher Stammbruch ist: in diesem Falle ist $a = \frac{b}{n}$ eine gebrochene oder rationale Zahl. Im dritten Falle giebt es keinen endlichen Werth von n, welcher der Bedingung genügt, oder n liegt gewissermaassen am Ende der Reihe, ist unendlich gross, während der Divisor $\frac{1}{n}$ unendlich klein ist, mithin auch der Rest r verschwindet: in diesem Falle wird der Quotient b unendlich gross und die als ein Bruch mit unendlich grossem Zähler und Nenner sich darstellende Zahl $a = \frac{b}{n}$ ist eine irrationale Zahl.

Diess ist meines Erachtens die natürliche und logische Definition der ganzen, der rationalen und der irrationalen Zahl. Dieselben stellen die drei Neutralitätsstufen der Quantität dar; sie entsprechen der Zählung durch die Einheit oder der Vollzählung, ferner der Zählung durch einen aliquoten Theil der Einheit oder der Bruchbildung und endlich der Zählung durch ein unendlich kleines Element oder der Irrationalzählung, d. h. der stetigen Zählung. Durch die Zählung mittelst unendlich kleiner Elemente wird jeder Punkt der reellen Axe, jeder mögliche Quantitätswerth der Zahlenreihe erreicht; es wird die ganze Reihe stetig durchzählt: die irrationale Zahl ist daher die stetige Zahl. Während der rationale Bruch immer als ein endliches Vielfaches eines endlichen aliquoten Theiles der Einheit dargestellt werden kann, erscheint die irrationale Zahl immer als ein unendliches Vielfaches eines unendlich kleinen Theiles der Einheit oder immer als ein Bruch mit unendlich grossem ganzen Zähler und unendlich grossem ganzen Nenner oder auch als das rationale Verhältniss zweier unendlich grossen ganzen Zahlen oder auch als das unendliche Vielfache eines unendlich kleinen Theiles. Das Charakteristische des wirklichen Bruches ist aber, dass er niemals anders als durch ein Vielfaches eines aliquoten Einheitstheiles (nie als ein Vielfaches der Einheit selbst) dargestellt werden kann: ebenso ist es charakteristisch für die irrationale Zahl, welche einen endlichen Werth >0 hat, dass sie niemals anders, als durch einen Bruch mit unendlich grossem ganzen Zähler und Nenner (nie als ein Bruch mit endlichem ganzen Zähler und endlichem ganzen Nenner) dargestellt werden kann. Dass man einen rationalen Bruch durch fortgesetzte Vervielfachung seines Zählers und Nenners in einen Bruch mit unendlich grossem Zähler und Nenner verwandeln kann, dass überhaupt jede ganze und jede rationale Zahl in die Form einer irrationalen Zahl gebracht werden kann, ist selbst-

verständlich, da bei der obigen Durchmessung der reellen Axe mittelst des unendlich kleinen Theilers $\frac{1}{n}$ alle ganzen und alle rationalen Zahlen ebenfalls erreicht werden. Niemals erlangt aber eine rationale Zahl hierdurch das Wesen einer irrationalen Zahl, da bei der obigen Messung der rationalen Zahl durch den sukzessiv absteigenden aliquoten Einheitstheil $\frac{1}{n}$ bei einem bestimmten Werthe von n der Rest $r = 0$ erscheinen, die gegebene Zahl also als rationaler Bruch erkannt werden wird, wogegen die irrationale Zahl durch keinen bestimmten aliquoten Einheitstheil ohne Rest getheilt werden kann.

Wir heben wiederholt mit Nachdruck hervor, dass eine unendliche Zahl n keinen bestimmten und keinen konstanten Werth hat, dass ihr Werth vielmehr unbestimmt und variabel ist, dass sie also eine im Flusse befindliche, jede denkbare Grenze überschreitende Zahl ist. In gleicher Weise ist auch die unendlich kleine Zahl $\frac{1}{n}$ unbestimmt und variabel, indem sie unausgesetzt dem Nullwerthe zueilt, ohne denselben jemals zu erreichen, weil der unendlich grosse Werth des Nenners n unerschöpfbar ist. Die Variabilität eines Zählers und eines Nenners schliesst nicht die Konstanz des Verhältnisses Beider aus: die aus einem unendlichen Zähler und Nenner gebildete Irrationalzahl $a = \frac{b}{n}$ ist durchaus bestimmt und konstant: in dem Maasse wie sich der unendliche Nenner n in dem Quotienten $b : n$ vergrössert, vergrössert sich auch der unendliche Zähler b, oder in dem Maasse wie sich der unendlich kleine Faktor $\frac{1}{n}$ in dem Produkte $\frac{1}{n} \cdot b$ verkleinert, vergrössert sich der andere Faktor b. Es ist nicht unwichtig, die Näherungswerthe, deren Grenze die Irrationalzahl a ist, zu betrachten, indem dieselben in allen Rechnungen unter dem Vorbehalte des Eintrittes in den Grenzwerth die Irrationalzahl ersetzen können.

Wenn n und n' zwei beliebige endliche, aber sehr grosse ganze Zahlen sind; so hat man sowohl

$$a = \frac{b + nr}{n}, \text{ als auch } a = \frac{b' + n'r'}{n'}$$

Da mit wachsendem n auch b wächst, während nr stets < 1 bleibt; so verschwindet mit wachsendem n das Glied nr immer mehr und mehr gegen b, oder in $a = \frac{b}{n} + r$ nähert sich mit wachsendem n der Rest r immer mehr der Null und die Werthe $\frac{b}{n}$, $\frac{b'}{n'}$ nähern sich immer mehr und mehr dem wahren Werthe von a. Da die ganze Zahl n ganz beliebig gewählt werden kann; so lässt sich dafür immer eine Potenz von

10 (oder von der Basis des künstlichen Zahlensystems) nehmen: auf diese Weise ergeben $\frac{b}{10^m}$, $\frac{b'}{10^{m+1}}$, $\frac{b''}{10^{m+2}}$ etc. die Näherungswerthe von a in Form eines Dezimalbruches. Der genaue Werth von a hat immer die Form $\frac{b + nr}{n}$ und kann für $n = 10^m$ in der Form $\frac{b + r10^m}{10^m}$ geschrieben werden. Der mit dem Nenner n proportional wachsende Zähler ist also nicht der Zähler b irgend eines Näherungswerthes, sondern die Grösse $b + nr$. Der Zähler b eines dekadischen Näherungswerthes wächst zwar mit dem Nenner n, aber nicht proportional; man hat vielmehr

$$\frac{b + nr}{b' + n'r'} = \frac{n}{n'}$$

oder

$$\frac{b}{b'} = \frac{1 + \frac{n'r'}{b'}}{1 + \frac{nr}{b}} \cdot \frac{n}{n'}$$

und nur für unendliche Werthe von n wird $\frac{b}{b'} = \frac{n}{n'}$, weil dann $\frac{b}{n}$ und $\frac{b'}{n'}$ der Irrationalzahl a genau gleich werden.

Dass für unendliche ganze Zahlen, weil sie unbestimmt und variabel sind, die Gesetze der Theilbarkeit endlicher oder bestimmter ganzen Zahlen, also auch die Gesetze der Kongruenz der Zahlen nicht gelten können, ist selbstverständlich. Eine unendliche ganze Zahl hat keinen bestimmten Rest; sie ist jeder endlichen ganzen Zahl für jeden endlichen Model kongruent; von einer Theilbarkeit oder Untheilbarkeit derselben durch eine endliche ganze Zahl kann überall keine Rede sein: der Begriff der Theilbarkeit verliert also wegen der Unbestimmtheit des Restes jede Bedeutung, ebenso der Begriff der Untheilbarkeit, und der Name unendliche Primzahl involvirt einen Widerspruch.

Die Unbestimmtheit der unendlichen ganzen Zahl gestattet auch nicht, sie in der Form einer Potenz von bestimmtem Grade, z. B. als Quadrat- oder Kubikzahl zu denken. Sie ist zugleich Quadrat- und Kubikzahl, aber auch nicht; sie ist quadratischer Rest und Nichtrest.

Die Unbestimmtheit der unendlichen ganzen Zahlen überträgt sich auf die Irrationalzahlen, da dieselben Brüche mit unendlich grossem ganzen Zähler und Nenner sind, nur soweit, als diese Zähler und Nenner als selbstständige Grössen in Betracht kommen, nicht aber, soweit das Verhältniss derselben oder der absolute Werth der Irrationalzahl in Betracht kömmt, weil dieser Werth durchaus bestimmt und konstant ist. Da durch die Zählung eines unendlich kleinen aliquoten Theiles der Einheit

die ganze Zahlenreihe stetig durchmessen wird, es also keinen Quantitätswerth geben kann, der nicht als Bruch mit ganzem Zähler und Nenner darstellbar wäre; so ist die Bruchform oder das Verhältniss zweier ganzen Zahlen der allgemeine Ausdruck jeder Vielheit. Diese Erkenntniss giebt das Mittel, die allgemeinen Regeln der Grundoperationen, welche Irrationalzahlen enthalten oder darauf führen, streng zu beweisen, z. B. der Regeln $(a + b)c = ac + bc$, $abc = (ab)c$, $a^n b^n = (ab)^n$, $\sqrt[n]{a}\ \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$, $(a^b)^c = a^{bc}$ u. s. w., worin a, b, c ganze rationale oder irrationale Zahlen sein mögen. So ergiebt sich z. B. die Formel $\sqrt[n]{a}\ \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$, wenn man $\sqrt[n]{a} = \frac{p}{q}$, $\sqrt[n]{b} = \frac{r}{s}$, also $a = \left(\frac{p}{q}\right)^n$, $b = \left(\frac{r}{s}\right)^n$ setzt, aus der einfachen Entwicklung

$$\sqrt[n]{a}\ \sqrt[n]{b} = \frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s} = \sqrt[n]{\left(\frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s}\right)^n} = \sqrt[n]{\left(\frac{p}{q}\right)^n \left(\frac{r}{s}\right)^n} = \sqrt[n]{ab}$$

Dass zwei irrationale Zahlen sowohl in einem ganzen, als auch in einem rationalen und in einem irrationalen Verhältnisse zueinander stehen und ebenso gut ein ganzes, wie ein rationales und ein irrationales Produkt haben können, ist einleuchtend. Im Übrigen giebt es unter den Irrationalzahlen keine Klassen von solchen Eigenartigkeiten, dass sich ihre Angehörigen nicht durch die einfachsten Grundprozesse aus einander darstellen liessen, insbesondere keine Klassen, welche den Primzahlen und den aus bestimmten Primzahlen zusammengesetzten ganzen Zahlen analog wären. Alle Irrationalzahlen, wie z. B. $\sqrt[n]{a}$, $log\ a$, $sin\ a$ u. s. w. lassen sich stets durch einunddenselben Nenner oder Theiler, überhaupt durch jede beliebige unendliche Zahl n als Nenner oder jeden beliebigen unendlich kleinen Theiler $\frac{1}{n}$ darstellen. Für die gewöhnlichen praktischen Rechnungen werden in der That alle Zahlen ohne Ausnahme in der Dezimalform angeschaut, also sämmtlich mittelst des Nenners 10^m dargestellt, welcher für die endlichen Zahlen eine endliche und für die irrationalen Zahlen eine unendlich hohe Potenz von 10 ist.

§. 8.

Die Primzahlen.

Eine in ganze Faktoren nicht zerlegbare ganze Zahl ist eine Primzahl. So einfach diese Definition ist, so unbestimmt ist sie, wenn das Zahlengebiet, aus welchem die Faktoren genommen werden sollen, nicht bestimmt ist. Bei den reellen Primzahlen galt es, ehe man die komplexen Zahlen kannte, für selbstverständlich, dass die Faktoren ebenfalls

reelle Zahlen seien. Nach der Erkenntniss der komplexen Zahlen fiel jene Einschränkung fort; es wurden auch komplexe Faktoren zugelassen und dadurch einerseits das Bereich der reellen Primzahlen wesentlich beschränkt, indem sich manche dieser Zahlen wie z. B. $5 = (2 + i)(2 - i)$ als zusammengesetzte Zahlen erwiesen, andererseits das allgemeine Bereich der Primzahlen wesentlich erweitert, indem sich nun zu den reellen auch komplexe Primzahlen gesellten. In meiner „Unbestimmten Analytik“ (S. 681 und 682) habe ich die vollkommenen reellen und komplexen Primzahlen bis zur Norm 4001 aufgeführt. Wenn man der Sache auf den Grund geht und in Erwägung zieht, dass sich im Gesammtgebiete der Zahlen das Gebiet der zweidimensionalen über dem der eindimensionalen, das der dreidimensionalen über dem der zweidimensionalen, das der vierdimensionalen über dem der dreidimensionalen u. s. w., allgemein, das der n-dimensionalen über dem der $(n - 1)$-dimensionalen erhebt und dass jedes höhere Gebiet alle tieferen einschliesst; so ergiebt sich, dass bei einer rationellen Klassifikation der Primzahlen einmal das Gebiet in Betracht kömmt, welchem die Primzahl angehören soll, sodann aber auch das Gebiet, welchem die Faktoren angehören sollen. Hiernach nennen wir

a) eine gemeine n-dimensionale Primzahl diejenige n-dimensionale Zahl, welche sich in keine n-dimensionalen oder niedriger dimensionirten Faktoren zerlegen lässt. Hiernach sind die reellen Primzahlen 2, 3, 5, 7..., welche früher dafür gehalten wurden, sämmtlich gemeine reelle Primzahlen und die Zahlen, welche man jetzt komplexe Primzahlen nennt, sind, weil nur ihre komplexen und reellen Faktoren in Betracht kommen, gemeine komplexe Primzahlen.

Ferner nennen wir

b) eine relative Primzahl vom r-dimensionalen Faktorengebiete eine Zahl, welche sich in keine r-dimensionalen oder niedriger dimensionirten Faktoren zerlegen lässt. Hiernach sind die reellen Zahlen 7, 11..., welche sich in keine komplexen und reellen Faktoren zerlegen lassen, relative Primzahlen vom zweidimensionalen Faktorengebiete und alle Zahlen, welche sich in keine triplexen, duplexen und simplexen Faktoren zerlegen lassen, sind relative Primzahlen vom dreidimensionalen oder vom anschaulichen Faktorengebiete.

Sowohl die gemeinen, wie die relativen Primzahlen sind nicht nothwendig absolute Primzahlen, da sie möglicherweise in Faktoren höherer Gebiete zerlegt werden können. Der Begriff der absoluten Unzerlegbarkeit ist von jeder Klassifikation unabhängig; wir nennen daher

c) eine absolute oder vollkommene Primzahl eine Zahl, welche sich in keine Faktoren irgend eines Gebietes zerlegen lässt.

Ehe wir von den vollkommenen Primzahlen reden, wollen wir die reellen Zahlen untersuchen, welche sich in triplexe, quadruplexe und höher dimensionirte Faktoren zerlegen lassen, und diejenigen, welche eine solche Zerlegung nicht gestatten, d. h. wir wollen die relativen

reellen Primzahlen ermitteln, also den Gesichtspunkt erweitern, welcher für die Zerlegung der reellen Zahlen in komplexe Faktoren maassgebend gewesen ist.

Unsere nächste Aufgabe besteht daher in der Bestimmung der beiden aus einem reellen, einem Deklinations-, Inklinations-, Reklinations- etc. Koeffizienten zusammengesetzten Zahlen

$$a\,c^{\alpha i}\,e^{\beta i_1}\,c^{\gamma i_2}\ldots \text{ und } a_1\,c^{\alpha_1 i}\,e^{\beta_1 i_1}\,c^{\gamma_1 i_2}\ldots$$

deren Projektionen ganze Glieder sind, unter der Bedingung, dass ihr Produkt eine ganze reelle Zahl sei. Da das Produkt gleich

$$a\,a_1\,e^{(\alpha+\alpha_1)i}\,e^{(\beta+\beta_1)i_1}\,c^{(\gamma+\gamma_1)i_2}\ldots$$

ist; so erfordert die Bedingung, dass dasselbe in die reelle Axe falle, die Gleichung $\alpha + \alpha_1 = n\pi$, worin n eine beliebige ganze Zahl ist. Diese Gleichung stimmt überein mit den beiden Gleichungen

$$cos(\alpha+\alpha_1) = \pm 1 \text{ und } sin(\alpha+\alpha_1) = 0$$

Wenn ihr genügt wird, ist das Produkt der beiden gegebenen Zahlen gleich

$$\pm\, a\,a_1\,e^{(\beta+\beta_1)i_1}\,e^{(\gamma+\gamma_1)i_2}\ldots$$

und, abgekürzt, gleich $\pm\, a\,a_1$, da alle Glieder, welche auf das erste Glied folgen, nach (9) verschwinden, sobald $sin(\alpha+\alpha_1) = 0$ ist. Insofern also nur das Zusammenfallen des Produktes mit der reellen Axe verlangt wird, reicht die Bedingung $\alpha + \alpha_1 = n\pi$ aus: wenn aber vollkommene Äquipollenz des Produktes mit einer positiven reellen Grösse verlangt wird, muss zunächst $\alpha + \alpha_1 = 2n\pi$ und ausserdem $\beta + \beta_1 = 2s\pi$, $\gamma + \gamma_1 = 2s\pi$ u. s. w., also

$$\begin{aligned} cos(\alpha+\alpha_1) &= +1 & sin(\alpha+\alpha_1) &= 0 \\ cos(\beta+\beta_1) &= +1 & sin(\beta+\beta_1) &= 0 \\ cos(\gamma+\gamma_1) &= +1 & sin(\gamma+\gamma_1) &= 0 \text{ u. s. w.} \end{aligned}$$

sein. In diesem Falle ist nicht bloss der abgekürzte, sondern auch der vollständige Werth des Produktes gleich $a\,a_1$.

Sind nun die beiden Faktoren, indem wir uns vorläufig auf triplexe Zahlen beschränken, in der abgekürzten Form (22), (23) gegeben, sodass die Beziehungen (24) bis (27) gelten; so muss zunächst

$$a\,a_1 = \sqrt{(x^2+y^2+z^2)(x_1^2+y_1^2+z_1^2)}$$

eine ganze Zahl sein. Diess wird geschehen, wenn für ganze Werthe von m, c, c_1 $x^2 + y^2 + z^2 = mc^2$ und $x_1^2 + y_1^2 + c_1^2 = m\,c_1^2$, also $a = c\sqrt{m}$, $a_1 = c_1\sqrt{m}$ ist. Die Beziehungen (26) und (27) fordern dann die Bedingungen

$$\frac{xx_1 - \sqrt{y^2 + z^2}\ \sqrt{y_1^2 + z_1^2}}{mcc_1} = 1$$

$$x_1\sqrt{y^2 + z^2} + x\sqrt{y_1^2 + z_1^2} = 0$$

$$\frac{yy_1 - zz_1}{\sqrt{y^2 + z^2}\ \sqrt{y_1^2 + z_1^2}} = 1$$

$$y_1 z + yz_1 = 0$$

Hieraus aber folgt

$$\frac{x_1}{x} = -\frac{y_1}{y} = \frac{z_1}{z} = \frac{c_1}{c} = d \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

während gleichzeitig $\sqrt{y^2 + z^2}$ und $\sqrt{y_1^2 + z_1^2}$ mit entgegengesetzten Zeichen zu nehmen sind. Zwei ganze triplexe Zahlen liefern also dann und nur dann ein ganzes reelles Produkt, wenn sie die Form

$$x + yi + zii_1$$
$$dx - dyi + dzii_1$$

haben, worin d eine ganze positive oder negative reelle Zahl ist; das Produkt ist

$$aa_1 = da^2 = d(x^2 + y^2 + z^2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31)$$

Wenn das Produkt eine reelle Primzahl sein soll, muss $d = 1$ sein, und man hat allgemein

$$x^2 + y^2 + z^2 = (x + yi + zii_1)(x - yi + zii_1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32)$$

worin natürlich x, y und z sowohl mit positivem, wie mit negativem Zeichen genommen werden können.

Hierdurch sind wir zu dem interessanten Satze gelangt, dass jede reelle Primzahl, welche sich als die Summe dreier Quadrate darstellen lässt, keine absolute Primzahl ist, sondern sich in zwei triplexe ganze Faktoren zerlegen lässt. Hiernach sind 3, 11, 19, 29 u. s. w. keine vollkommenen Primzahlen, weil $3 = 1^2 + 1^2 + 1^2$, $11 = 3^2 + 1^2 + 1^2$, $19 = 3^2 + 3^2 + 1^2$, $29 = 4^2 + 3^2 + 2^2$ ist. So hat man

$$\begin{aligned}
3 &= (1 + i + ii_1)(1 - i + ii_1)\\
11 &= (3 + i + ii_1)(3 - i + ii_1)\\
&= (1 + 3i + ii_1)(1 - 3i + ii_1)\\
&= (1 + i + 3ii_1)(1 - i + 3ii_1)\\
&= (1 + i - 3ii_1)(1 - i - 3ii_1)\\
29 &= (4 + 3i + 2ii_1)(4 - 3i + 2ii_1)
\end{aligned}$$

Betrachten wir jetzt die Produkte aus zwei Faktoren von beliebiger Dimensität, z. B. aus den beiden fünfdimensionalen Faktoren

$$a\,e^{\alpha i}\,e^{\beta i_1}\,e^{\gamma i_2}\,e^{\delta i_3}\,e^{\epsilon i_4} = x + yi + zii_1 + uii_1i_2 + vii_1i_2i_3 + wii_1i_2i_3i_4$$

$$a_1\,e^{\alpha_1 i}\,e^{\beta_1 i_1}\,e^{\gamma_1 i_2}\,e^{\delta_1 i_3}\,e^{\epsilon_1 i_4} = x_1 + y_1 i + z_1 ii_1 + u_1 ii_1i_2 + v_1 ii_1i_2i_3 + w_1 ii_1i_2i_3i_4$$

Das Produkt hat die Form

$$a a_1\,e^{(\alpha+\alpha_1)i}\,e^{(\beta+\beta_1)i_1}\,e^{(\gamma+\gamma_1)i_2}\,e^{(\delta+\delta_1)i_3}\,e^{(\epsilon+\epsilon_1)i_4}$$

$$= a a_1 \cos(\alpha+\alpha_1) + a a_1 \sin(\alpha+\alpha_1)\cos(\beta+\beta_1)\,i$$
$$+ a a_1 \sin(\alpha+\alpha_1)\sin(\beta+\beta_1)\cos(\gamma+\gamma_1)\,ii_1$$
$$+ a a_1 \sin(\alpha+\alpha_1)\sin(\beta+\beta_1)\sin(\gamma+\gamma_1)\cos(\delta+\delta_1)\,ii_1i_2$$
$$+ a a_1 \sin(\alpha+\alpha_1)\sin(\beta+\beta_1)\sin(\gamma+\gamma_1)\sin(\delta+\delta_1)\cos(\varepsilon+\varepsilon_1)\,ii_1i_2i_3$$
$$+ a a_1 \sin(\alpha+\alpha_1)\sin(\beta+\beta_1)\sin(\gamma+\gamma_1)\sin(\delta+\delta_1)\sin(\varepsilon+\varepsilon_1)\,ii_1i_2i_3i_4$$

Der erste Faktor liefert die Beziehungen

$$a\cos\alpha = x \qquad \cos\alpha = \frac{x}{a} \qquad \sin\alpha = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a}$$

$$a\sin\alpha\cos\beta = y \quad \cos\beta = \frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2}} \quad \sin\beta = \frac{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$a\sin\sin\beta\cos\gamma = z$$

$$\cos\gamma = \frac{z}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \qquad \sin\gamma = \frac{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2 - z^2}}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$$

$$a\sin\sin\beta\sin\gamma\cos\delta = u$$

$$\cos\delta = \frac{u}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2 - z^2}} \qquad \sin\delta = \frac{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2 - z^2 - u^2}}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2 - z^2}}$$

$$a\sin\sin\beta\sin\gamma\sin\delta\cos\varepsilon = v$$

$$\cos\varepsilon = \frac{v}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2 - z^2 - u^2}}$$

$$\sin\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2 - z^2 - u^2 - v^2}}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2 - z^2 - u^2}}$$

$$a\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\sin\delta\sin\varepsilon = w \qquad \sin\varepsilon = \frac{w}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2 - z^2 - u^2}}$$

Die beiden Werthe von $\sin\varepsilon$ stimmen überein, da man $a^2 = x^2 + y^2 + z^2 + u^2 + v^2 + w^2$ hat.

Die Beziehungen, welche der zweite Faktor liefert, unterscheiden sich von den vorstehenden nur durch den Zeiger 1. Aus diesen beiden Gruppen von Bedingungen folgt

$$\cos(\alpha + \alpha_1) = \frac{x x_1 - \sqrt{a^2 - x^2}\sqrt{a_1^2 - x_1^2}}{a a_1}$$

$$\sin(\alpha + \alpha_1) = \frac{x\sqrt{a_1^2 - x_1^2} + x_1\sqrt{a^2 - x^2}}{a a_1}$$

$$\cos(\beta + \beta_1) = \frac{y y_1 - \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\ \sqrt{a_1^2 - x_1^2 - y_1^2}}{\sqrt{a^2 - x^2}\ \sqrt{a_1^2 - x_1^2}}$$

$$\sin(\beta + \beta_1) = \frac{y\sqrt{a_1^2 - x_1^2 - y_1^2} + y_1\ \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}{\sqrt{a^2 - x^2}\ \sqrt{a_1^2 - x_1^2}}$$

$$\cos(\gamma + \gamma_1) = \frac{z z_1 - \sqrt{a^2 - x^2 - y^2 - z^2}\ \sqrt{a_1^2 - x_1^2 - y_1^2 - z_1^2}}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\ \sqrt{a_1^2 - x_1^2 - y_1^2}}$$

$$\sin(\gamma + \gamma_1) = \frac{z\sqrt{a_1^2 - x_1^2 - y_1^2 - z_1^2} + z_1\ \sqrt{a^2 - x^2 - y^2 - z^2}}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\ \sqrt{a_1^2 - x_1^2 - y_1^2}}$$

$$\cos(\delta + \delta_1) = \frac{u u_1 - \sqrt{a^2 - x^2 - y^2 - z^2 - u^2}\ \sqrt{a_1^2 - x_1^2 - y_1^2 - z_1^2 - u_1^2}}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2 - z^2}\ \sqrt{a_1^2 - x_1^2 - y_1^2 - z_1^2}}$$

$$\sin(\delta + \delta_1) = \frac{u\sqrt{a_1^2 - x_1^2 - y_1^2 - z_1^2 - u_1^2} + u_1\sqrt{a^2 - x^2 - y^2 - z^2 - u^2}}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2 - z^2}\sqrt{a_1^2 - x_1^2 - y_1^2 - z_1^2}}$$

$$\cos(\varepsilon + \varepsilon) = \frac{v v_1 - \sqrt{a^2 - x^2 - y^2 - z^2 - u^2 - v^2}\sqrt{a_1^2 - x_1^2 - y_1^2 - z_1^2 - u_1^2 - v_1^2}}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2 - z^2 - u^2}\ \sqrt{a_1^2 - x_1^2 - y_1^2 - z_1^2 - u_1^2}}$$

$$= \frac{v v_1 - w w_1}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2 - z^2 - u^2}\sqrt{a_1^2 - x_1^2 - y_1^2 - z_1^2 - u_1^2}}$$

$$\sin(\varepsilon + \varepsilon_1) = \frac{v\sqrt{a_1^2 - x_1^2 - y_1^2 - z_1^2 - u_1^2 - v_1^2} + v_1\sqrt{a^2 - x^2 - y^2 - z^2 - u^2 - v^2}}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2 - z^2 - u^2}\ \sqrt{a_1^2 - x_1^2 - y_1^2 - z_1^2 - u_1^2}}$$

$$= \frac{v w_1 + v_1 w}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2 - z^2 - u^2}\ \sqrt{a_1^2 - x_1^2 - y_1^2 - z_1^2 - u_1^2}}$$

Damit das Produkt einer reellen Zahl äquipollent sei, muss $sin\ (\alpha + \alpha_1)$, $sin\ (\beta + \beta_1)$, $sin\ (\gamma + \gamma_1)$, $sin\ (\delta + \delta_1)$ und $sin\ (\varepsilon + \varepsilon_1)$ gleich null sein. Dies fordert

$$\frac{x_1}{x} = -\frac{y_1}{y} = \frac{z_1}{z} = -\frac{u_1}{u} = \frac{v_1}{v} = -\frac{w_1}{w} = d. \quad . \quad . \quad (33)$$

und die Quantität dieses reellen Produktes ist

$$aa_1 = da^2 = d(x^2 + y^2 + z^2 + u^2 + v^2 + w^2) \quad . \quad . \quad (34)$$

Soll dieses Produkt eine gemeine reelle Primzahl p sein; so muss man $d = 1$, folglich

$$p = x^2 + y^2 + z^2 + u^2 + v^2 + w^2$$

$$x_1 = x \quad y_1 = -y \quad z_1 = z \quad u_1 = -u \quad v_1 = v \quad w_1 = -w$$

haben. Hieraus folgt, dass jede reelle Primzahl, welche sich als eine Summe von n Quadraten darstellen lässt, keine vollkommene Primzahl, sondern das Produkt der beiden n-dimensionalen Faktoren

$$p = x^2 + y^2 + z^2 + u^2 + \text{etc.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (35)$$

$$= (x + yi + zii_1 + uii_1i_2 + \text{etc.})\ (x - yi + zii_1 - uii_1i_2 + \text{etc.})$$

ist. Die Glieder dieser beiden Faktoren, welche gleiche Grundrichtungen haben, besitzen gleiche Quantität; in den ersten, dritten, fünften u. s. w. Gliedern stimmen auch die Zeichen überein; die zweiten, vierten, sechsten u. s. w. Glieder haben entgegengesetzte Zeichen: im Übrigen kann jedes Glied des ersten Faktors nach Belieben positiv oder negativ genommen und die absoluten Quantitäten dieser Glieder können beliebig miteinander vertauscht werden. So ist z. B. $83 = 3^2 + 5^2 + 7^2 = (3 + 5i + 7ii_1)\ (3 - 5i + 7ii_1)$ aber auch $= (3 + 5i - 7ii_1)\ (3 - 5i - 7ii_1)$, sowie $= (-3 + 5i + 7ii_1)\ (-3 - 5 + 7ii_1)$, ferner $= (7 + 3i + 5ii_1)\ (7 - 3i + 5ii_1)$ u. s. w.

Manche Primzahl lässt sich in mehrfacher Weise als Quadratsumme von derselben Gliederzahl darstellen. So ist 83 auch $= 1^2 + 1^2 + 9^2 = (1 + i + 9ii_1)\ (1 - i + 9ii_1)$. Manche Primzahl ist mit verschiedener Gliederzahl als Quadratsumme darzustellen; so ist $17 = 1^2 + 4^2$ und auch $= 2^2 + 2^2 + 3^2$. Die zerlegbaren gemeinen Primzahlen lassen sich also in verschiedener Weise in Faktoren zerlegen.

Jede Primzahl p ist eine Quadratsumme von p Gliedern in der Form $p = 1^2 + 1^2 + 1^2 + \cdots$ Keine gemeine Primzahl ist daher eine vollkommene Primzahl, sondern stets in Faktoren zerlegbar, deren Glieder die Einheiten der sukzessiv aufsteigenden Neutralitätsstufen nach der Formel

$$p = (1 + i + ii_1 + ii_1i_2 + \text{etc.})\ (1 - i + ii_1 - ii_1i_2 + \text{etc.}) \quad . \quad . \quad (36)$$

sind. Hierin können die Grössen i, i_1, i_2 etc. nach Belieben positiv oder negativ genommen werden. So hat man z. B. $3 = (1 + i + ii_1)$

$(1 - i + ii_1)$, $5 = (1 + i + ii_1 + ii_1 i_2 + ii_1 i_2 i_3)\,(1 - i + ii_1 - ii_1 i_2 + ii_1 i_2 i_3)$.

Durch Einschaltung beliebig vieler Glieder vom Werthe 0 kann die m-gliedrige Quadratsumme $x^2 + y^2 + z^2 + \cdots$ in eine $(m+n)$-gliedrige von der Form $x^2 + 0^2 + y^2 + z^2 + \cdots$ oder $x^2 + 0^2 + 0^2 + y^2 + z^2$ oder $x^2 + 0^2 + y^2 + 0^2 + z^2$ u. s. w. verwandelt werden. Diess giebt verschiedene Zerlegungen der Zahl $x^2 + y^2 + z^2 + \cdots$ in Faktoren, welche zwar sämmtlich dieselbe Gliederzahl, aber doch Glieder von verschiedenen Neutralitätsstufen enthalten. So ist hiernach

$$x^2 + y^2 = (x + yi)\,(x - yi) = (x + yii_1)\,(x + yii_1)$$
$$= (x + yii_1 i_2)\,(x - yii_1 i_2) = (xi + yii_1 i_2)\,(-xi - yii_1 i_2)$$
$$2 = 1 + 1 = (1 + i)\,(1 - i) = (1 + ii_1)\,(1 + ii_1)$$
$$= (1 + ii_1 i_2)\,(1 - ii_1 i_2) = (i + ii_1 i_2)\,(-i - ii_1 i_2)$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + u^2 + \cdots$$
$$= (x + yi + zii_1 + \cdots)\,(x - yi + zii_1 - \cdots)$$
$$= (x + yii_1 + zii_1 i_2 i_3 + \cdots)\,(x + yii_1 + zii_1 i_2 i_3 + \cdots)$$

Hierdurch kann jede Zahl als das Produkt zweier gleichen abgekürzten Faktoren dargestellt werden. Diese beiden Faktoren decken sich zwar, sind aber nicht äquipollent; insbesondere ist in der Formel

$$x^2 + y^2 = (x + yii_1)\,(x + yii_1)$$

wenn man den ersten Faktor gleich $ae^{\alpha i}e^{\frac{\pi}{2}i_1}$ setzt, der zweite Faktor gleich $ae^{-\alpha i}e^{\frac{3\pi}{2}i_1}$. Hiernach ist das Produkt dieser beiden gleichen abgekürzten Faktoren oder Projektionen durchaus nicht das Quadrat des einen oder des anderen Faktors, also nicht gleich $(x + yii_1)^2$.

Die Grössen $1 + i + ii_1 + \cdots$, deren Glieder die Einheiten der verschiedenen Neutralitätsstufen sind, erlangen durch Vorstehendes eine grosse Wichtigkeit für das Zahlensystem. Wir wollen zunächst den genauen Verhältnisswerth einer solchen abgekürzten oder Fortschrittsgrösse in der Form $ae^{\alpha i}e^{\beta i_1}e^{\gamma i_2}e^{\delta i_3}e^{\epsilon i_4}\ldots$ darstellen. Die Norm a^2 ist offenbar gleich der Anzahl der Glieder des Aggregates und wenn diese Glieder vollzählig sind, hat die Zahl a^2 Dimensionen (sonst bestimmt die Neutralitätsstufe des letzten Gliedes die Dimensität). Angenommen, es handele sich um ein sechsgliedriges Aggregat, also um eine sechsdimensionale Zahl, sodass $a^2 = 6$ ist und fünf neutrale Drehungen α, β, γ, δ, ε in Betracht kommen. Nach den Formeln auf S. 82 hat man dann, wenn man die beiden Fälle, dass ein Glied des Aggregates gleich $+1$ oder gleich -1 sein kann, dadurch ausdrückt, dass man seinen Quantitätswerth gleich $\sqrt{1}$, also das Aggregat selbst gleich $\sqrt{1} + i\sqrt{1} + ii_1\sqrt{1}$ + etc. setzt,

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{1}}{a} \qquad \sin\alpha = \frac{\sqrt{a^2-1}}{a}$$

$$\cos\beta = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{a^2-1}} \qquad \sin\beta = \frac{\sqrt{a^2-2}}{\sqrt{a^2-1}}$$

$$\cos\gamma = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{a^2-2}} \qquad \sin\gamma = \frac{\sqrt{a^2-3}}{\sqrt{a^2-2}}$$

$$\cos\delta = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{a^2-3}} \qquad \sin\delta = \frac{\sqrt{a^2-4}}{\sqrt{a^2-3}}$$

$$\cos\varepsilon = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{a^2-4}} \qquad \sin\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2-5}}{\sqrt{a^2-4}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{a^2-4}}$$

Für $a^2 = 6$ werden die Kosinus der Winkel α, β, γ, δ, ε resp. gleich

$$\sqrt{\frac{1}{6}},\ \sqrt{\frac{1}{5}},\ \sqrt{\frac{1}{4}},\ \sqrt{\frac{1}{3}},\ \sqrt{\frac{1}{2}}$$

und die Sinus resp.

$$\sqrt{\frac{5}{6}},\ \sqrt{\frac{4}{5}},\ \sqrt{\frac{3}{4}},\ \sqrt{\frac{2}{3}},\ \sqrt{\frac{1}{2}}$$

Hierdurch sind die Winkel α, β, γ, δ, ε sämmtlich bestimmt. Wenn eine zweite Zahl durch die Grössen a_1, α_1, β_1, γ_1 ..., eine dritte durch a_2, α_2, β_2, γ_2 . . ., eine vierte durch a_3, α_3, β_3, γ_3 . . . dargestellt ist; so ist das Produkt der ersten beiden in abgekürzter Form

$$a\,a_1 \cos(\alpha + \alpha_1) + a\,a_1 \sin(\alpha + \alpha_1) \cos(\beta + \beta_1)\, i$$
$$+ a\,a_1 \sin(\alpha + \alpha_1) \sin(\beta + \beta_1) \cos(\gamma + \gamma_1)\, i\,i_1 + \text{etc.}$$

Das Produkt der ersten drei Zahlen ist

$$a\,a_1\,a_2 \cos(\alpha + \alpha_1 + \alpha_2) + a\,a_1\,a_2 \sin(\alpha + \alpha_1 + \alpha_2) \cos(\beta + \beta_1 + \beta_2).\, i$$
$$+ \text{etc.}$$

Die Werthe der Glieder dieses Produktes ergeben sich aus den Werthen der Sinus und Kosinus der einfachen Winkel nach folgenden Formeln

$$\cos(\alpha + \alpha_1) = \frac{\sqrt{1} - \sqrt{a^2-1}\ \sqrt{a_1^2-1}}{a\,a_1}$$

$$\sin(\alpha + \alpha_1) = \frac{\sqrt{1}\ \sqrt{a^2-1} + \sqrt{1}\ \sqrt{a_1^2-1}}{a\,a_1}$$

$$\cos(\beta + \beta_1) = \frac{\sqrt{1} - \sqrt{a^2-2}\ \sqrt{a_1^2-2}}{\sqrt{a^2-1}\ \sqrt{a_1^2-1}}$$

$$\sin(\beta + \beta_1) = \frac{\sqrt{1}\,\sqrt{a^2-2} + \sqrt{1}\,\sqrt{a_1^2-2}}{\sqrt{a^2-1}\,\sqrt{a_1^2-1}}$$

$$\cos(\gamma + \gamma_1) = \frac{\sqrt{1} - \sqrt{a^2-3}\,\sqrt{a_1^2-3}}{\sqrt{a^2-2}\,\sqrt{a_1^2-2}}$$

$$\sin(\gamma + \gamma_1) = \frac{\sqrt{1}\,\sqrt{a^2-3} + \sqrt{1}\,\sqrt{a_1^2-3}}{\sqrt{a^2-2}\,\sqrt{a_1^2-2}}$$

$$\cos(\delta + \delta_1) = \frac{\sqrt{1} - \sqrt{a^2-4}\,\sqrt{a_1^2-4}}{\sqrt{a^2-3}\,\sqrt{a_1^2-3}}$$

$$\sin(\delta + \delta_1) = \frac{\sqrt{1}\,\sqrt{a^2-4} + \sqrt{1}\,\sqrt{a_1^2-4}}{\sqrt{a^2-3}\,\sqrt{a_1^2-3}}$$

$$\cos(\varepsilon + \varepsilon_1) = \frac{\sqrt{1} - \sqrt{1}}{\sqrt{a^2-4}\,\sqrt{a_1^2-4}}$$

$$\sin(\varepsilon + \varepsilon_1) = \frac{\sqrt{1} + \sqrt{1}}{\sqrt{a^2-4}\,\sqrt{a_1^2-4}}$$

Die zweideutige Grösse $\sqrt{1}$ kann an jeder Stelle ihren besonderen Werth haben. Wenn der zweite Faktor mehr oder weniger Glieder hat, als der erste, modifizirt sich leicht der Schluss dieser Gruppe von Formeln.

Für das aus drei Faktoren bestehende Produkt ergiebt sich

$$\cos(\alpha + \alpha_1 + \alpha_2) = \frac{\sqrt{1} - \sqrt{1}\sqrt{a^2-1}\sqrt{a_1^2-1} - \sqrt{1}\sqrt{a^2-1}\sqrt{a_2^2-1} - \sqrt{1}\sqrt{a_1^2-1}\sqrt{a_2^2-1}}{a\,a_1\,a_2}$$

$$\sin(\alpha + \alpha_1 + \alpha_2) = \frac{\sqrt{1}\sqrt{a^2-1} + \sqrt{1}\sqrt{a_1^2-1} + \sqrt{1}\sqrt{a_2^2-1} - \sqrt{1}\sqrt{a^2-1}\sqrt{a_1^2-1}\sqrt{a_2^2-1}}{a\,a_1\,a_2}$$

$$\cos(\beta + \beta_1 + \beta_2) = \frac{\sqrt{1} - \sqrt{1}\sqrt{a^2-2}\sqrt{a_1^2-2} - \sqrt{1}\sqrt{a^2-2}\sqrt{a_2^2-2} - \sqrt{1}\sqrt{a_1^2-2}\sqrt{a_2^2-2}}{\sqrt{a^2-1}\sqrt{a_1^2-1}\sqrt{a_2^2-1}}$$

$$\sin(\beta + \beta_1 + \beta_2) = \frac{\sqrt{1}\sqrt{a^2-2} + \sqrt{1}\sqrt{a_1^2-2} + \sqrt{1}\sqrt{a_2^2-2} - \sqrt{1}\sqrt{a^2-2}\sqrt{a_1^2-2}\sqrt{a_2^2-2}}{\sqrt{a^2-1}\sqrt{a_1^2-1}\sqrt{a_2^2-1}}$$

$$\cos(\gamma + \gamma_1 + \gamma_2) = \frac{\sqrt{1} - \sqrt{1}\sqrt{a^2-3}\sqrt{a_1^2-3} - \sqrt{1}\sqrt{a^2-3}\sqrt{a_2^2-3} - \sqrt{1}\sqrt{a_1^2-3}\sqrt{a_2^2-3}}{\sqrt{a^2-2}\sqrt{a_1^2-2}\sqrt{a_2^2-2}}$$

$$\sin(\gamma + \gamma_1 + \gamma_2) = \frac{\sqrt{1}\sqrt{a^2-3} + \sqrt{1}\sqrt{a_1^2-3} + \sqrt{1}\sqrt{a_2^2-3} - \sqrt{1}\sqrt{a^2-3}\sqrt{a_1^2-3}\sqrt{a_2^2-3}}{\sqrt{a^2-2}\sqrt{a_1^2-2}\sqrt{a_2^2-2}}$$

Bei gleicher Gliederzahl aller Faktoren werden die letzten Formeln

$$\cos(\varepsilon + \varepsilon_1 + \varepsilon_2) = \frac{\sqrt{1} - \sqrt{1} - \sqrt{1} - \sqrt{1}}{\sqrt{a^2-4}\,\sqrt{a_1^2-4}\,\sqrt{a_2^2-4}}$$

$$\sin(\varepsilon + \varepsilon_1 + \varepsilon_2) = \frac{\sqrt{1} + \sqrt{1} + \sqrt{1} - \sqrt{1}}{\sqrt{a^2-4}\,\sqrt{a_1^2-4}\,\sqrt{a_2^2-4}}$$

Aus den trigonometrischen Funktionen der Winkelsummen ergeben sich sofort die einzelnen Glieder des Produktes. Wenn alle Faktoren die gleiche Gliederzahl haben und vollständig sind, wenn also $a^2 = a_1^2 = a_2^2 =$ etc. ist; so ergiebt sich für ein Produkt aus zwei Faktoren

$$x = a\,a_1 \cos(\alpha + \alpha_1) = \sqrt{1} - \sqrt{1}\,(a^2-1)$$

$$y = a\,a_1 \sin(\alpha + \alpha_1)\cos(\beta + \beta_1)$$
$$= \frac{(\sqrt{1} + \sqrt{1})\,\{\sqrt{1} - \sqrt{1}\,(a^2 - 1)\}}{\sqrt{a^2-1}}$$

$$z = a\,a_1 \sin(\alpha + \alpha_1)\sin(\beta + \beta_1)\cos(\gamma + \gamma_1)$$
$$= \frac{(\sqrt{1} + \sqrt{1})\,(\sqrt{1} + \sqrt{1})\,\{\sqrt{1} - \sqrt{1}\,(a^2 - 3)\}}{\sqrt{a^2-1}\,\sqrt{a^2-2}}$$

u. s. w. Für ein Produkt aus drei Faktoren wird

$$x = a\,a_1\,a_2 \cos(\alpha + \alpha_1 + \alpha_2) = \sqrt{1} - (\sqrt{1} + \sqrt{1} + \sqrt{1})\,(a^2 - 1$$

$$y = a\,a_1\,a_2 \sin(\alpha + \alpha_1 + \alpha_2)\cos(\beta + \beta_1 + \beta_2) =$$
$$\frac{\{\sqrt{1}+\sqrt{1}+\sqrt{1}-\sqrt{1}\,(a^2-1)\}\;\{\sqrt{1}-(\sqrt{1}+\sqrt{1}+\sqrt{1})\,(a^2-2)\}}{a_2 - 1}$$

$$z = a\,a_1\,a_2 \sin(\alpha + \alpha_1 + \alpha_2)\sin(\beta + \beta_1 + \beta_2)\cos(\gamma + \gamma_1 + \gamma_2) =$$
$$\frac{\{\sqrt{1}+\sqrt{1}+\sqrt{1}-\sqrt{1}(a^2-1)\}\;\{\sqrt{1}+\sqrt{1}+\sqrt{1}-\sqrt{1}(a^2-2)\}\;\{\sqrt{1}-(\sqrt{1}+\sqrt{1}+\sqrt{1})\,(a^2-}{(a^2-1)\;(a^2-2)}$$

u. s. w. Man sieht, nicht jedes Produkt aus Zahlen, deren Glieder neutrale Einheiten sind, ist wiederum eine ganze Zahl. Auch erkennt man, dass sich nicht jede ganze mehrdimensionale Zahl in Faktoren zerlegen lässt, deren Glieder neutrale Einheiten sind, dass also diese Faktoren nicht die einzigen vollkommenen Primzahlen sind.

Was diese vollkommenen Primzahlen betrifft; so geht aus dem Vorstehenden hervor, dass es unter den reellen Zahlen keine vollkommenen Primzahlen ausser der Einheit giebt. Alle gemeinen reellen Primzahlen sind nur relative Primzahlen irgend eines Faktorengebietes, und zwar gehört eine gemeine Primzahl, welche sich als n-gliedrige Quadratsumme darstellen lässt, dem n-dimensionalen

Faktorengebiete an. Manche gemeine reelle Primzahl lässt sich auf verschiedene Weise als Quadratsumme darstellen, gehört also verschiedenen Gebieten an. Das höchste Gebiet, welchem eine gemeine reelle Primzahl und überhaupt eine reelle Zahl angehört, ist dasjenige, dessen Dimensität durch die Zahl der in dieser Zahl enthaltenen Einheiten gemessen wird: die diesem Gebiete entsprechenden Primfaktoren sind Aggregate aus lauter neutralen Einheiten.

Betrachten wir jetzt die komplexen Zahlen. Die gemeinen komplexen Primzahlen sind diejenigen, deren Norm eine reelle Primzahl ist, welche sich als Summe zweier Quadrate darstellen lässt (vergl. §. 194 meiner unbestimmten Analytik). Diese Zahlen, wie z. B. die Zahl $1 + 2i$ lässt sich in keine komplexen oder reellen Faktoren zerlegen. Es entsteht aber die Frage, ob sich eine solche Zahl $m + ni$ nicht in höher dimensionirte Faktoren zerlegen lasse. Angenommen, sie habe die Faktoren

$$a + bi + cii_1 + \cdots,\ a_1 + b_1 i + c_1 i i_1 + \cdots,\ a_2 + b_2 i + c_2 i i_1 + \cdots$$

u. s. w.; so muss nothwendig

$$\sqrt{m^2 + n^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + \cdots} \cdot \sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + \cdots} \times \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 + \cdots} \text{ etc.}$$

also

$$m^2 + n^2 = (a^2 + b^2 + c^2 + \cdots)\ (a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + \cdots) \times (a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 + \cdots) \text{ etc.}$$

sein. Da aber die Norm $m^2 + n^2$ der gemeinen komplexen Primzahl eine gemeine reelle Primzahl ist; so hat dieselbe keine reellen Faktoren. Die letzte Gleichung ist also unmöglich und daraus folgt, dass jede gemeine komplexe Primzahl eine vollkommene Primzahl ist.

Das Nämliche gilt von den gemeinen triplexen Primzahlen, da deren Norm eine reelle Primzahl ist, welche sich als Summe dreier Quadrate darstellen lässt. Übrigens können manche zwei triplexe Primzahlen dasselbe Produkt hervorbringen wie zwei andere triplexe, auch wie zwei duplexe Primzahlen.

Hiernach kann man allgemein sagen, diejenige Zahl ist eine vollkommene Primzahl, deren Norm eine gemeine reelle Primzahl ist. Die reellen Zahlen, mit Ausnahme der 1, sind hierdurch sämmtlich von den vollkommenen Primzahlen ausgeschlossen, da keine reelle Zahl a eine Primzahl zur Norm a^2 haben kann. Übrigens giebt es unter den reellen Zahlen nicht bloss gemeine Primzahlen (welche keine reellen Faktoren haben), sondern auch relative Primzahlen vom zwei-, drei-, vierdimensionalen und jedem höheren Faktorengebiete (welche sich in höher dimensionirte Faktoren zerlegen lassen). Unter den höher dimensionirten Zahlen giebt es jedoch nur vollkommene Primzahlen, indem alle gemeinen auch absolute sind (welche sich weder in gleichdimensionirte, noch in höher oder niedriger dimensionirte Faktoren zerlegen lassen).

§. 9.

Zerlegung der gemeinen reellen Primzahlen.

Es ist nicht unsere Absicht, in die spezielle Ermittlung der verschiedenen möglichen Zerlegungen der Zahlen einzutreten; es würde Diess ein Gegenstand der erweiterten Zahlentheorie sein. Wir beschränken uns in dieser Hinsicht auf einige Bemerkungen.

Bekannt sind folgende Sätze: Jede reelle Primzahl von der Form $4n + 1$ ist die Summe zweier Quadrate $x^2 + y^2$. Jede reelle Primzahl von der Form $8n + 1$ oder $8n + 3$ ist die Summe eines Quadrates und eines Doppelquadrates $x^2 + 2y^2$, mithin auch die Summe dreier Quadrate $x^2 + y^2 + y^2$. Jede ganze Zahl ist die Summe von vier oder weniger Quadraten $x^2 + y^2 + z^2 + u^2$.

Hiernach kann jede reelle Zahl in zwei vierdimensionale oder in zwei niedriger dimensionirte Primzahlen zerlegt werden. Die reellen Primzahlen von der Form $4n + 1$ lassen Zerlegungen in zwei komplexe Primzahlen und die reellen Primzahlen von der Form $8n + 3$ Zerlegungen in zwei dreidimensionale Primzahlen zu.

Da sich jede Quadratzahl x^2 in sehr verschiedener Weise als Summe von Quadraten der Zahlen $1, 2, 3 \ldots (x - 1)$, z. B. $3^2 = 9$ als $2^2 + 2^2 + 1^2$ oder als $2^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2$ u. s. w. darstellen lässt; so lässt sich eine reelle Zahl auf verschiedene Weise in höher dimensionirte Faktoren zerlegen. Diese Zahl kann durch Einschaltung annullirter Glieder beliebig vergrössert werden, wiewohl hieraus nur eine Erhöhung der Dimensität der Faktoren, nicht eine Vermehrung der gültigen Glieder entspringen kann. Die höchste Zahl der Glieder der Faktoren der reellen Primzahl p ist stets $= p$, indem sich diese Zahl auf die Zerlegung in lauter Einheitsquadrate nach der Formel $p = 1^2 + 1^2 + 1^2 +$ etc. stützt.

Wenn man die annullirten Glieder ausser Acht lässt; so ist die Anzahl der Quadratsummen, in welchen sich eine reelle Zahl darstellen lässt, eine ganz bestimmte; so lässt sich die Zahl 5 nur als eine zweigliedrige Quadratsumme $2^2 + 1^2$ oder als eine fünfgliedrige Quadratsumme $1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2$, sie lässt sich aber nicht als eine eingliedrige oder als eine dreigliedrige oder als eine viergliedrige Quadratsumme darstellen. Unter diesen Umständen hat ein Satz Wichtigkeit, welcher erkennen lässt, ob sich eine Zahl als Quadratsumme von bestimmter Gliederzahl darstellen lasse. Ehe wir diesen Satz aussprechen, machen wir darauf aufmerksam, dass die reellen Primzahlen ausser der 2 in die beiden Formen $4n + 1$ und $4n + 3$, die Primzahlen der letzten Form aber wieder in die beiden Formen $8n + 3$ und $8n + 7$,

die der letzten Form wieder in die beiden Formen $16n + 7$ und $16n + 15$, die der letzten Form wieder in die beiden Formen $32n + 15$ und $32n + 31$ u. s. w. geschieden werden können. Hiernach können alle Primzahlen p nach den Formen

$$4n + 1,\quad 8n + 3,\quad 16n + 7,\quad 32n + 15 \text{ etc.}$$

gesondert werden. Keine dieser Formen schliesst die andere ein und ihr genereller Ausdruck ist die Form

$$p = 2^r n + 2^{r-1} - 1 = 2^{r-1}(2n + 1) - 1$$

also das um 1 verminderte Produkt einer beliebigen ungeraden Zahl $2n + 1$ in eine Potenz von 2. Indem für diese Potenz ein immer höherer Grad genommen wird, wächst der Werth der Primzahl bei gleichem Werthe der Grösse n und übersteigt selbst für $n = 0$ nach und nach jeden Werth. Daraus folgt, dass durch diese Form alle unterhalb einer bestimmten Grenze liegenden Primzahlen vollständig erschöpft und zugleich nach den einzelnen Formen geordnet werden.

Wenn man die ungerade Primzahl p in der vorstehenden Form darstellt, ist $p + 1$ das Produkt $2^s(2n + 1)$ einer Potenz der Zahl 2 vom Grade $s = r - 1$ in eine ungerade Zahl $2n + 1$ und unser Satz, dessen Beweis wir dem Leser überlassen, sagt, dass sich die ungerade Primzahl p als Summe von $s + 1 = r$ Quadraten darstellen lasse. Hiernach lässt sich also eine Primzahl von der Form

$4n + 1 = 2\ (2n + 1) - 1$ als Summe von 2 Quadraten
$8n + 3 = 2^2\,(2n + 1) - 1$ „ „ „ 3 „
$16n + 7 = 2^3\,(2n + 1) - 1$ „ „ „ 4 „
$32n + 15 = 2^4\,(2n + 1) - 1$ „ „ „ 5 „

u. s. w. darstellen. Beispielsweise ergeben die Primzahlen bis 127 folgende Tabelle.

Primzahl p	Form $2^s(2n+1)-1$	Zahl der Quadrate $s+1$	Werth der Quadratseiten							
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
3	$2^2 . 1 - 1$	3	1	1	1					
5	$2^1 . 3 - 1$	2	2	1						
7	$2^3 . 1 - 1$	4	2	1	1	1				
11	$2^2 . 1 - 1$	3	3	1	1					
13	$2^1 . 7 - 1$	2	3	2						
17	$2^1 . 9 - 1$	2	4	1						
19	$2^2 \ 5 - 1$	3	3	3	1					
23	$2^3 . 3 - 1$	4	3	3	2	1				
29	$2^1 . 15 - 1$	2	5	2						
31	$2^5 . 1 - 1$	6	3	3	2	2	2	1		
37	$2^1 . 19 - 1$	2	6	1						
41	$2^1 . 21 - 1$	2	5	4						
43	$2^2 . 11 - 1$	3	5	3	3					
47	$2^4 . 3 - 1$	5	5	4	2	1	1			
53	$2^1 . 27 - 1$	2	7	2						
59	$2^2 . 15 - 1$	3	5	5	3					
			7	3	1					
61	$2^1 . 31 - 1$	2	6	5						
67	$2^2 . 17 - 1$	3	7	3	3					
71	$2^3 . 9 - 1$	4	7	3	3	2				
73	$2^1 . 37 - 1$	2	8	3						
79	$2^4 . 5 - 1$	5	8	3	2	1	1			
83	$2^2 . 21 - 1$	3	9	1	1					
			7	5	3					
89	$2^1 . 45 - 1$	2	8	5						
97	$2^1 . 49 - 1$	2	9	4						
101	$2^1 . 51 - 1$	2	10	1						
103	$2^3 . 13 - 1$	4	10	1	1	1				
107	$2^2 . 27 - 1$	3	7	7	3					
			9	5	1					
109	$2^1 . 55 - 1$	2	10	3						
113	$2^1 . 57 - 1$	2	8	7						
127	$2^7 . 1 - 1$	8	8	4	4	4	3	2	1	1

Auch von dem bekannten Satze, dass das Produkt aus zwei Summen von je zwei oder vier Quadraten wiederum eine Summe von zwei, resp. vier Quadraten ist, wird man bei den obigen Rechnungen zuweilen einen nützlichen Gebrauch machen. Wir verallgemeinern diesen Satz, indem wir sagen, dass ein Produkt aus Summen von je 2^r Quadraten wiederum eine Summe von ebensoviel Quadraten, dass also das Produkt aus Summen von je 2, 4, 8, 16, 32 Quadraten wiederum eine Summe von resp. 2, 4, 8, 16, 32 Quadraten ist.

Zum Beweise dieses Satzes und zur Entwicklung des Gesetzes, nach welchem sich die der Formel

$$(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \cdots)\ (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + \cdots) = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 + \cdots$$

mit 2^r Gliedern entsprechenden Werthe von A_1, A_2, A_3 ... aus den Grössen a_1, a_2, a_3 ... und b_1, b_2, b_3 ... bilden, stellen wir den Werth jedes A als Summe von 2^r Gliedern dar, deren jedes das Produkt eines a und eines positiven oder negativen b ist, indem wir zum a des ersten, zweiten, dritten u. s. w. Gliedes stets resp. das a_1, a_2, a_3 u. s. w. annehmen, sodass also die verschiedenen A sämmtlich die Form

$$A = a_1 b + a_2 b + a_3 b + a_4 b + \cdots$$

erhalten, worin noch die Zeiger und die Zeichen der b näher zu bestimmen sind.

Wie gross der Exponent r der Gliederzahl 2^r auch sein möge, immer ist der Anfang der Reihen, welche die Werthe von A_1, A_2, A_3 ... darstellen, derselbe; jeder höhere Fall von 2^r schliesst also alle niedrigeren Fälle 2^{r-1}, 2^{r-2} etc. dergestalt in sich, dass der nächst vorhergehende Fall die erste Hälfte der A des späteren Falles und von jedem dieser A die erste Hälfte der Glieder enthält. Während also der Fall $2^4 = 16$ überhaupt 16 verschiedene A mit 16 Gliedern hat, kommen für $2^3 = 8$ nur die erste Hälfte jener Werthe mit den ersten 8 Gliedern in Betracht. Demnach enthalten in allen Fällen die ersten beiden Glieder der ersten beiden A nur die Grössen a_1, a_2 und b_1, b_2, die ersten vier Glieder der ersten vier A nur die Grössen a_1, a_2, a_3, a_4 und b_1, b_2, b_3, b_4 u. s. f. Aus jedem späteren Falle ergiebt sich daher jede frühere sofort durch Annullirung der Grössen a und b von späteren Zeigern.

Zur Verdeutlichung des Gesetzes schreiben wir zunächst die Werthe der A für $2^r = 2, 4, 8$ nieder. Dieselben sind in der nachstehenden Tafel enthalten, wenn man dieselbe entweder hinter der zweiten, oder hinter der dritten, oder hinter der vierten hakenförmigen Grenzlinie abbricht.

$$
\begin{array}{llllllll}
A_1 = & +a_1b_1 & +a_2b_2 & +a_3b_3 & +a_4b_4 & +a_5b_5 & +a_6b_6 & +a_7b_7 & +a_8b_8 \\
A_2 = & +a_1b_2 & -a_2b_1 & -a_3b_4 & +a_4b_3 & -a_5b_6 & +a_6b_5 & +a_7b_8 & -a_8b_7 \\
A_3 = & +a_1b_3 & +a_2b_4 & -a_3b_1 & -a_4b_2 & -a_5b_7 & -a_6b_8 & +a_7b_5 & +a_8b_6 \\
A_4 = & +a_1b_4 & -a_2b_3 & +a_3b_2 & -a_4b_1 & -a_5b_8 & +a_6b_7 & -a_7b_6 & +a_8b_5 \\
A_5 = & +a_1b_5 & +a_2b_6 & +a_3b_7 & +a_4b_8 & -a_5b_1 & -a_6b_2 & -a_7b_3 & -a_8b_4 \\
A_6 = & +a_1b_6 & -a_2b_5 & +a_3b_8 & -a_4b_7 & +a_5b_2 & -a_6b_1 & +a_7b_4 & -a_8b_3 \\
A_7 = & +a_1b_7 & -a_2b_8 & -a_3b_5 & +a_4b_6 & +a_5b_3 & -a_6b_4 & -a_7b_1 & +a_8b_2 \\
A_8 = & +a_1b_8 & +a_2b_7 & -a_3b_6 & -a_4b_5 & +a_5b_4 & +a_6b_3 & -a_7b_2 & -a_8b_1
\end{array}
$$

Es kömmt lediglich auf die Zeiger von b und die Zeichen der Glieder an. Die nachstehende Tafel enthält diese Zeiger und Zeichen für $2^r = 16$ Quadrate.

+ 1	+ 2	+ 3	+ 4	+ 5	+ 6	+ 7	+ 8	+ 9	+ 10	+ 11	+ 12	+ 13	+ 14	+ 15	+ 16
+ 2	− 1	− 4	+ 3	− 6	+ 5	+ 8	− 7	− 10	+ 9	+ 12	− 11	+ 14	− 13	+ 16	+ 15
+ 3	+ 4	− 1	− 2	− 7	− 8	+ 5	+ 6	− 11	− 12	+ 9	+ 10	+ 15	+ 16	− 13	− 14
+ 4	− 3	+ 2	− 1	− 8	+ 7	− 6	+ 5	− 12	+ 11	− 10	+ 9	+ 16	− 15	+ 14	− 13
+ 5	+ 6	+ 7	+ 8	− 1	− 2	− 3	− 4	− 13	− 14	− 15	− 16	+ 9	+ 10	+ 11	+ 12
+ 6	− 5	+ 8	− 7	+ 2	− 1	+ 4	− 3	− 14	+ 13	− 16	+ 15	− 10	+ 9	− 12	+ 11
+ 7	− 8	− 5	+ 6	+ 3	− 4	− 1	+ 2	− 15	+ 16	+ 13	− 14	− 11	+ 12	+ 9	− 10
+ 8	+ 7	− 6	− 5	+ 4	+ 3	− 2	− 1	− 16	− 15	+ 14	+ 13	− 12	− 11	+ 10	+ 9
+ 9	+ 10	+ 11	+ 12	+ 13	+ 14	+ 15	+ 16	− 1	− 2	− 3	− 4	− 5	− 6	− 7	− 8
+ 10	− 9	+ 12	− 11	+ 14	− 13	− 16	+ 15	+ 2	− 1	+ 4	− 3	+ 6	− 5	− 8	+ 7
+ 11	− 12	− 9	+ 10	+ 15	+ 16	− 13	− 14	+ 3	− 4	− 1	+ 2	+ 7	+ 8	− 5	− 6
+ 12	+ 11	− 10	− 9	+ 16	− 15	+ 14	− 13	+ 4	+ 3	− 2	− 1	+ 8	− 7	+ 6	− 5
+ 13	− 14	− 15	− 16	− 9	+ 10	+ 11	+ 12	+ 5	− 6	− 7	− 8	− 1	+ 2	+ 3	+ 4
+ 14	+ 13	− 16	+ 15	− 10	− 9	− 12	+ 11	+ 6	+ 5	− 8	+ 7	− 2	− 1	− 4	+ 3
+ 15	+ 16	+ 13	− 14	− 11	+ 12	− 9	− 10	+ 7	+ 8	+ 5	− 6	− 3	+ 4	− 1	− 2
+ 16	− 15	+ 14	+ 13	− 12	− 11	+ 10	− 9	+ 8	− 7	+ 6	+ 5	− 4	− 3	+ 2	− 1

Das Gesetz der Zeiger von b ist folgendes. Wenn es sich um Quadratsummen von 16 Gliedern handelt; so bildet die ganze Tafel aller $16 \times 16 = 256$ Zeiger ein quadratisches Feld $ABCD$ (Fig. 26). In der Diagonale AC steht überall der Zeiger 1. In diesem Felde durchlaufen die Zeiger längs der Seiten AB, AD, CD, CB die Reihenfolge $1, 2, 3 \ldots 16$.

Fig. 26.

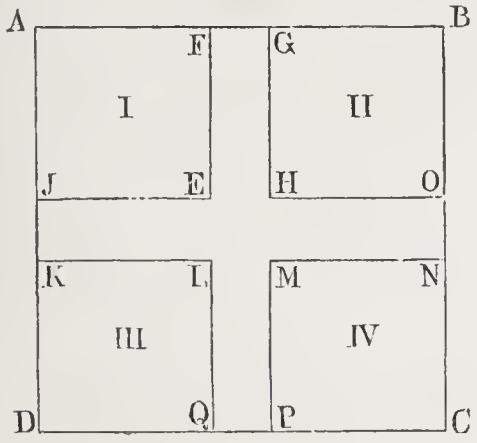
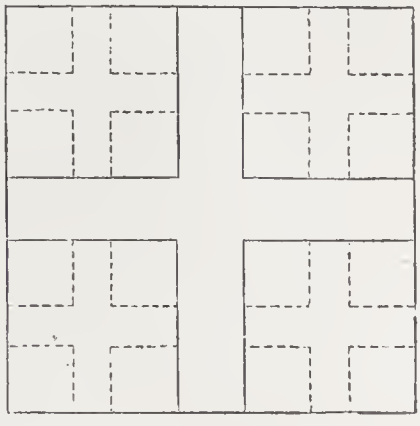


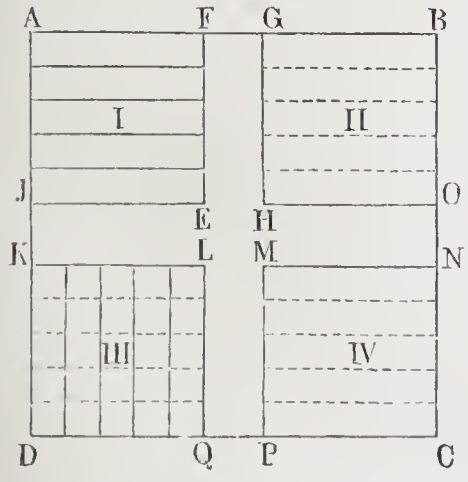
Fig. 27.



Wenn man dieses Feld nach der Figur in 4 kleinere quadratische Felder $AFEJ$, $BGHO$, $DQLK$, $CNMP$ abtheilt, worin die inneren Seiten FQ, GP, sowie JO, KN durch die in der Mitte der Seiten des grossen Feldes unmittelbar nebeneinander liegenden Zeiger 7, 8 gehen; so stellen die inneren Umfänge der kleinen Quadrate längs der vier Linien $EFGH$, $EJKL$, $MNOH$, $MPQL$ wiederum die Zahlenreihe $1, 2, 3 \ldots 16$ dar. Auf diese Weise sind also die Zeiger einmal in den Umfang des grossen Quadrates und auch in den Umfängen der 4 kleineren Quadrate, welche Letzteren unmittelbar aneinander liegen, niedergeschrieben.

Ganz in derselben Weise, wie das grosse Quadrat $ABCD$ in die vier kleineren zerlegt ist, werden nun die kleineren Quadrate in vier Theilquadrate zerlegt und in deren Umfänge die Zeiger geschrieben, welche jetzt die halbe der früheren Zahlenreihe von 1 bis 8 durchlaufen (Fig. 27). Nach dieser Regel füllt sich endlich das ursprüngliche Quadrat vollständig mit Zeigern aus, und es leuchtet ein, dass diese Regel unbegrenzte Gültigkeit für jeden Werth von 2^r hat, dass man damit sowohl ein grösseres Quadrat in kleinere Quadrate eintheilen, wie auch ein kleineres Quadrat durch Zusammensetzung zu einem grösseren erweitern kann.

Fig. 28.



Das Gesetz der Zeichen ist folgendes. Im ersten quadratischen Felde $ABCD$ (Fig. 26 u. 28) enthalten die beiden Seiten AB und AD nur das Zeichen $+$ und die Diagonale AC vom zweiten Gliede an nur das Zeichen $-$. Wenn jenes Feld in die vier kleineren Quadrate I, II, III, IV zerlegt wird, enthält die obere Seite KL des Quadrates III nur

das Zeichen + und die obere Seite MN des Quadrates IV nur das Zeichen —. Zwischen den Zeichen dieser vier Felder bestehen sodann diese Beziehungen: Die vertikalen Linien des Quadrates III, von der ersten KD an gerechnet, haben dieselbe Zeichenfolge wie die horizontalen Linien des Quadrates I, von der ersten AF an gerechnet. Die horizontalen Linien des Quadrates II, von der zweiten an gerechnet, haben die umgekehrten Zeichen wie die davor stehenden horizontalen Linien des Quadrates I. Die horizontalen Linien des Quadrates IV, von der zweiten an gerechnet, haben die nämlichen Zeichen wie die davor stehenden horizontalen Linien des Quadrates III. So ergeben die Zeichen des Quadrates I die des Quadrates II und des Quadrates III, während die Zeichen des Quadrates III die des Quadrates IV liefern: sind also die Zeichen eines der vier kleineren Quadrate bekannt; so erhält man daraus die des grossen Quadrates.

Für den Fall $2^r = 2$ oder der zweigliedrigen Quadratsummen hat das Quadrat $ABCD$ nur die vier Zeichen

$$\begin{matrix} + & + \\ + & - \end{matrix}$$

und es leuchtet ein, dass man hieraus nach dem vorstehenden Gesetze die Zeichen jedes höheren Falles von 2^r auferbauen kann, gleichwie man durch jenes Gesetz sofort die Tabelle jedes beliebigen Falles sukzessiv ausfüllen kann, indem jedes an irgend einer Stelle des Quadrates $ABCD$ bekannt gewordene Zeichen sofort zur Kenntniss von vier korrespondirenden Zeichen der Theilquadrate I, II, III, IV führt.

Dass die Quadratsumme $A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 + \cdots$ wirklich dem Produkte der beiden Quadratsummen $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \cdots$ und $b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + \cdots$ gleich ist, lässt sich leicht konstatiren, indem sich in jener ersteren alle Glieder, welche keine vollständigen Quadrate darstellen, paarweise einander aufheben.

Da schliesslich jedes a und jedes b sowohl positiv wie negativ genommen werden kann; so lässt sich das Produkt aus zwei Quadratsummen auf verschiedene Weise als Quadratsumme darstellen.

Aus der allgemeinen Form der Grösse A lassen sich manche speziellen Sätze ableiten, z. B. der bekannte Satz, dass das Produkt zweier Faktoren von der Form $a_1^2 + n a_2^2$ wiederum diese Form hat, sodann der Satz, dass das Produkt zweier fünfgliedrigen Faktoren von der Form $2 a_1^2 + 3 a_3^2$ die viergliedrige Form $A_1^2 + A_3^2 + 2 A_5^2$, dass das Produkt zweier sechsgliedrigen Faktoren von der Form $a_1^2 + 2 a_3^2 + 3 a_2^2$ die sechsgliedrige Form $A_1^2 + A_2^2 + 2 A_3^2 + 2 A_4^2$, dass das Produkt zweier siebengliedrigen Faktoren von der Form $a_1^2 + 2 a_2^2 + 4 a_4^2$ die siebengliedrige Form $A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 + A_4^2 + A_5^2 + 2 A_6^2$ hat u. dergl. m.

Nach dem vorstehenden Satze kann das Produkt beliebig vieler Faktoren, von welchen jeder eine Summe von Quadraten ist, deren Zahl in dem meistgliedrigen Faktor grösser als 2^{r-1}, jedoch nicht grösser als

2^r ist, immer als die Summe von 2^r Quadraten dargestellt werden, von welchen zuweilen einige sich auf den Nullwerth reduziren, sodass die Gliederzahl immer auf eine Zahl beschränkt werden kann, welche den Werth 2^r nicht übersteigt.

Wenn unter irgend einer Quadratseite a oder b eine imaginäre Zahl $a\sqrt{-1}$ oder $b\sqrt{-1}$ gedacht wird, erscheint in dem betreffenden Faktor ein negatives Quadrat. Diess hat auf die Entwicklung des vorstehenden Satzes keinen anderen Einfluss, als dass einige A komplexe Werthe annehmen. Diese komplexen Werthe verschwinden unter gewissen Umständen, namentlich dann, wenn immer ein imaginäres a mit einem imaginären b zusammentrifft, und auch dann, wenn alle Glieder eines A imaginär werden, indem alsdann im Produkte $-A^2$ an die Stelle von A^2 tritt.

So ist z. B. das Produkt zweier Zahlen von der Form $a_1^2 + a_2^2 - a_3^2 - a_4^2$ wiederum von dieser Form. Dagegen besteht das Produkt zweier Zahlen von der Form $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 - a_4^2$ aus einem reellen und drei komplexen Quadraten.

Da jeder Inbegriff von positiven und negativen Quadraten als eine Summe von positiven Quadraten, deren Seiten zum Theil imaginär sind, dargestellt werden kann; so lehrt der obige Satz, dass das Produkt zweier Zahlen, welche in beliebiger Weise aus positiven und negativen Quadraten zusammengesetzt sind, als eine Quadratsumme dargestellt werden kann. So ist z. B. das Produkt der Zahl $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2$ und der Zahl $b_1^2 + b_2^2 - b_3^2 - b_4^2$ eine Summe von vier komplexen Quadraten.

Dem Satze über das Produkt zweier Quadratsummen fügen wir den Satz über den Quotienten zweier Quadratsummen hinzu, welcher dahin lautet, dass der Quotient zweier Summen von 2^r Quadraten wiederum eine Summe von 2^r Quadraten ist, dass man also

$$\frac{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 + \cdots}{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + \cdots} = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \cdots$$

hat. Denn lös't man die obigen Gleichungen der Werthe von $A_1, A_2, A_3 \ldots$, welche durch die Grössen $a_1, a_2, a_3 \ldots$ und $b_1, b_2, b_3 \ldots$ ausgedrückt sind, für die Grössen $a_1, a_2, a_3 \ldots$ auf; so erhält man hierfür Werthe, welche sämmtlich den Nenner $N = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + \cdots$ haben, während sich die Zähler unmittelbar aus den Werthen der A ergeben, indem man darin die Grössen $a_1, a_2, a_3 \ldots$ resp. mit den Grössen $A_1, A_2, A_3 \ldots$, die Zeichen aber mit den Zeichen der in der Tabelle vertikal untereinander stehenden Zeichen vertauscht. Es ist nämlich

$$\begin{aligned}
a_1 &= [A_1\, b_1 + A_2\, b_2 + A_3\, b_3 + A_4\, b_4 + \cdots] : N \\
a_2 &= [A_1\, b_2 - A_2\, b_1 + A_3\, b_4 - A_4\, b_3 + \cdots] : N \\
a_3 &= [A_1\, b_3 - A_2\, b_4 - A_3\, b_1 + A_4\, b_2 + \cdots] : N \\
a_4 &= [A_1\, b_4 + A_2\, b_3 - A_3\, b_2 + A_4\, b_1 + \cdots] : N
\end{aligned}$$

etc. etc.

Die Werthe der a sind natürlich im Allgemeinen nur rational, nicht ganz. So hat man z. B. für

$$\frac{37}{23} = \frac{4^2 + 4^2 + 2^2 + 1^2}{3^2 + 3^2 + 2^2 + 1^2}$$

$$a_1 = (4.3 + 4.3 + 2.3 + 1.1) : 23 = \frac{29}{23}$$

$$a_2 = (4.3 - 4.3 + 2.1 - 2.1) : 23 = \frac{0}{23}$$

$$a_3 = (4.2 - 4.1 - 2.3 + 1.3) : 23 = \frac{1}{23}$$

$$a_4 = (4.1 + 4.2 - 2.3 - 1.3) : 23 = \frac{3}{23}$$

und in der That ist

$$\left(\frac{29}{23}\right)^2 + \left(\frac{0}{23}\right)^2 + \left(\frac{1}{23}\right)^2 + \left(\frac{3}{23}\right)^2 = \frac{37}{23}$$

§. 10.

Weitere Anwendungen des Situationskalkuls.

Die vorstehenden Prinzipien sind von ganz genereller arithmetischer Natur, sie ergeben sich aus den Entwicklungen der allgemeinen Begriffe von Grössen und Grössenveränderungen und erleiden demnach auf jedes wirkliche Grössengebiet Anwendung. Obgleich die räumliche Anschauung den Impuls zu dieser Erweiterung der Arithmetik gegeben hat; so handelt es sich in der Sache doch um eine reine Abstraktion, welche nun erst, nachdem die arithmetische Reinheit und Absolutheit ihrer Grundlage erkannt und von jedem Empirismus befreit ist, eine fruchtbare Anwendung auf das Gebiet des Raumes gestattet, eine Anwendung, welche keiner Kontrole durch geometrische Konstruktionen wie der Quaternionenkalkul bedarf, sondern auf jedem Schritte unbedingt sichere und ohne alle Frage mit der räumlichen Anschauung übereinstimmende Resultate liefert.

Der „Situationskalkul“ enthält zahlreiche Anwendungen jener Prinzipien, ausserdem aber dürfte derselbe darthun, dass dieselben nicht bloss ein zuverlässiges, sondern auch ein äusserst bequemes Mittel zur Behandlung vieler geometrischen Probleme, namentlich aller derjenigen darbietet, bei welchen es sich nicht bloss um die Anschauung nach allgemeinen Merkmalen und Klassen, sondern um die genaue Erkenntniss durch Messung mittelst fester Grundeinheiten handelt. Zum Nach-

weise der Vorzüge dieser Behandlung der Geometrie heben wir nur Folgendes hervor.

Verrückung und Drehung einer Figur. — Jedes Raumpolygon erscheint zunächst als die Summe seiner Seiten von der Form $a\, e^{\alpha i}\, e^{\beta i_1}$. Durch Zerlegung jedes Gliedes in seinen primären, sekundären und tertiären Theil und durch Zusammenfassung der ersten, der zweiten und der dritten Theile erscheint die Figur als ein dreigliedriges Aggregat in der abgekürzten Form

$$F = X + Yi + Zii_1$$

Jede Verrückung dieser Figur im Raume ist eine Addition, jede Drehung und verhältnissmässige Vergrösserung oder Verkleinerung derselben ist eine Multiplikation. Die Winkeldrehung φ um die tertiäre Axe OZ von X gegen Y wird durch Multiplikation des primären und sekundären Gliedes mit dem Koeffizienten $cos\ \varphi + sin\ \varphi . i$ ausgeführt. Die Winkeldrehung ψ um die primäre Axe OX von Y gegen Z wird durch die Multiplikation des sekundären und tertiären Gliedes mit dem Koeffizienten $cos\ \psi + sin\ \psi . i_1$ bewirkt. Die Winkeldrehung χ um die sekundäre Axe OY von X gegen Z wird durch die Multiplikation des primären und tertiären Gliedes mit dem Koeffizienten $cos\ \chi + sin\ \chi . ii_1$ vollzogen.

Drehung um eine beliebige Linie. — Um eine Winkeldrehung ϑ der Figur F um eine Linie OA zu bewirken, welche sich unter dem Winkel α gegen die Grundaxe OX neigt und in einer Ebene AOX liegt, welche sich unter dem Winkel β gegen die Grundebene XY neigt, kann man die Figur F mitsammt der Linie OA irgend eine konvenabele Bewegung im Raume machen lassen, wodurch OA in die Lage OA' gelangt, hierauf kann man die Drehung ϑ um die Linie OA' ausführen und sodann die ganze Figur F die rückgängige Bewegung machen lassen, wodurch die Linie OA' wieder die Richtung OA annimmt. So kann man z. B. der Figur F erst die Drehung $-\beta$ um die primäre Axe OX, dann die Drehung $-\alpha$ um die tertiäre Axe OZ, hierauf die Drehung ϑ um die primäre Axe OX und sodann, rückwärts gehend, die Drehung α um die tertiäre Axe OZ und zuletzt die Drehung β um die primäre Axe OX ertheilen.

Rechtwinklige Ecke in beliebiger Stellung. — Von besonderem Interesse zur Vergleichung mit dem Quaternionenkalkul ist der analytische Ausdruck, welchen die Figur der drei in den drei Grundaxen OX, OY, OZ liegenden Linien OA, OB, OC von der Länge der Längeneinheit durch eine beliebige Drehung in die Lage OA', OB', OC' annimmt. Empfängt irgend eine Linie $r = x + yi + zii_1$ erst die Drehung φ um die Axe OZ von X gegen Y, dann die Drehung ψ um die Axe OX von Y gegen Z und zuletzt die Drehung χ um die Axe OY von X gegen Z; so wird ihr Ausdruck r' durch die vorhin erwähnten drei Multiplikationen

$$r' =$$

$$\{x\,(\cos\varphi\cos\chi - \sin\varphi\sin\psi\sin\chi) - y\,(\sin\varphi\cos\chi + \cos\varphi\sin\psi\sin\chi) - z\cos\psi\sin\chi\}$$

$$+ \{x\sin\varphi\cos\psi + y\cos\varphi\cos\psi - z\sin\psi\}\,i$$

$$+ \{x\,(\cos\varphi\sin\chi + \sin\varphi\sin\psi\cos\chi) - y\,(\sin\varphi\sin\chi - \cos\varphi\sin\psi\cos\chi) + z\cos\psi\cos\chi\}\,i\,i_1$$

Demnach erhält die Linie OA, wofür $x = 1, y = 0, z = 0$ ist, die Lage

$$OA' = (\cos\varphi\cos\chi - \sin\varphi\sin\psi\sin\chi) + \sin\varphi\cos\psi\,.\,i + (\cos\varphi\sin\chi + \sin\varphi\sin\psi\cos\chi)\,i\,i_1$$

Ferner die Linie OB, wofür $x = 0_1\ y = 1,\ z = 0$ ist, die Lage

$$OB' = -(\sin\varphi\cos\chi + \cos\varphi\sin\psi\sin\chi) + \cos\varphi\cos\psi\,.\,i - (\sin\varphi\sin\chi - \cos\varphi\sin\psi\cos\chi)\,i\,i_1$$

Endlich die Linie OC, wofür $x = 0,\ y = 0,\ z = 1$ ist, die Lage

$$OC' = -\cos\psi\sin\chi - \sin\psi\,.\,i + \cos\psi\cos\chi\,.\,i\,i_1$$

Wir machen darauf aufmerksam, dass das Verhältniss irgend zwei der drei rechtwinkligen Linien OA', OB', OC' weder gleich i, noch gleich i_1, noch gleich $i\,i_1$ ist, dass dieses Verhältniss überhaupt keinen konstanten, sondern einen von den Winkeln φ, ψ, χ abhängigen und demnach variabelen Werth hat, dass also der Quaternionenkalkul, indem er jene Verhältnisse für konstant und für Einheitswurzeln hält, sich auf einem Irrthume auferbaut.

Es wird schwer nachzuweisen sein, dass irgend eine andere Methode mit geringeren Mitteln den vorstehenden allgemeinsten Ausdruck für drei aufeinander rechtwinklig stehende Linien OA', OB', OC' im Raume darzustellen vermag. Das Gleiche gilt von allen übrigen geometrischen Problemen, namentlich von den Koordinatenverwandlungen zwischen rechtwinkligen, polaren und natürlichen Koordinaten, von der Ableitung der Formeln der ebenen und sphärischen Trigonometrie, von der Darstellung der Polygone und Polyeder, sowie der Kurven und Flächen im Raume und von allen sonstigen geometrischen Gesetzen.

Sphärisches Dreieck. — Um diese Behauptung noch an einem Beispiele zu rechtfertigen, führen wir zunächst die schon weiter oben auf Seite 22 erwähnte Ableitung der Grundformeln der sphärischen Trigonometrie vor. Wenn in Figur 2 die Winkel des sphärischen Dreieckes ABC bei A, B, C resp. mit a, b, c, die diesen Winkeln gegenüberliegenden Bögen BC, CA, AB resp. mit α, β, γ bezeichnet werden, sodass, wenn O der Mittelpunkt der mit der Längeneinheit $OA = OB = OC$ beschriebenen Kugel oder die Spitze der körperlichen Ecke $OABC$ ist, a, b, c die Neigungswinkel der Seitenflächen und α, β, γ die Neigungswinkel BOC, COA, AOB der Kanten darstellen; so ist, wenn die Linie OA zur Grundaxe und die Fläche AOB zur Grundebene angenommen wird, die Linie OC

$$O\,C = e^{\beta\,i}\,e^{\alpha\,i_1} = \cos\beta + \sin\beta\cos a\,.\,i + \sin\beta\sin a\,.\,i\,i_1$$

Dieselbe Linie $O\,C$ ergiebt sich aber auch, wenn eine Linie von der Deklination α und Inklination $\pi - b$, also die Linie

$$e^{\alpha\,i}\,e^{(\pi-b)i_1} = \cos\alpha - \sin\alpha\cos b\,.\,i + \sin\alpha\sin b\,.\,i\,i_1$$

eine Drehung γ um die tertiäre (auf $A\,O\,B$ senkrecht stehende) Axe $O\,Z$ macht, wenn also der primäre und sekundäre Theil dieser Linie mit $\cos\gamma + \sin\gamma\,.\,i$ multiplizirt wird. Diess giebt

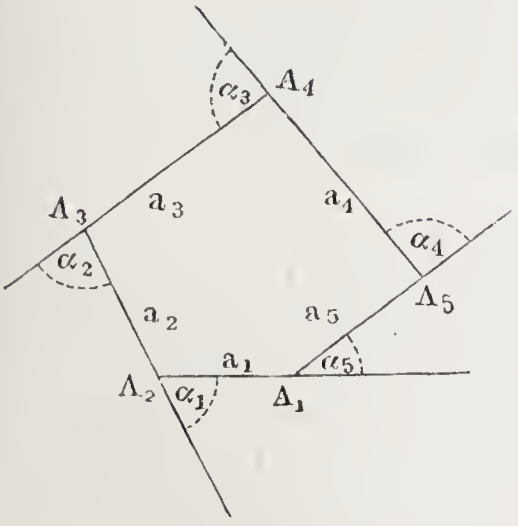
$$O\,C =$$
$$(\cos\alpha\cos\gamma + \sin\alpha\sin\gamma\cos b) + (\cos\alpha\sin\gamma - \sin\alpha\cos\gamma\cos b)\,i + \sin\alpha\sin b\,.\,i\,i_1$$

Damit dieser Ausdruck dem vorhergehenden von $O\,C$ gleich sei, müssen deren primäre, sekundäre und tertiäre Theile für sich gleich sein; man hat also sofort die drei Grundformeln der sphärischen Trigonometrie

$$\cos\beta = \cos\alpha\cos\gamma + \sin\alpha\sin\gamma\cos b$$
$$\sin\beta\cos a = \cos\alpha\sin\gamma - \sin\alpha\cos\gamma\cos b$$
$$\sin\beta\sin a = \sin\alpha\sin b$$

Das sphärische Dreieck erachten wir für eine ziemlich einfache geometrische Gestalt. Die nachfolgenden Beispiele sollen zeigen, mit welcher Leichtigkeit viel komplizirtere Figuren durch den Situationskalkul darzustellen sind.

Fig. 29.



Ebenes Polygon. — $A_1 A_2 A_3 \ldots A_n$ (Fig. 29) sei ein ebenes Polygon mit den n von links nach rechts herum gezählten Ecken $A_1, A_2, \ldots A_n$, es seien $a_1, a_2, \ldots a_n$ die Längen der n Seiten $A_1 A_2, A_2 A_3, \ldots A_n A_1$, ferner $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ die n äusseren Winkel zwischen a_1 und der verlängerten a_2, zwischen a_2 und der verlängerten a_3 u. s. w. Nimmt man die Ecke A_1 zum Nullpunkte und die Richtung $A_2 A_1$ der ersten Seite zur Grundaxe; so kann man sich das Polygon auf zwei verschiedene Weisen entstanden denken: einmal, durch sukzessive Anreihung der Seiten (a_n), $(a_{n-1}) \ldots (a_2)$, (a_1), deren analytische Ausdrücke

$$(a_n) = a_n e^{\alpha_n i}$$
$$(a_{n-1}) = a_{n-1} e^{(\alpha_{n-1} + \alpha_n) i}$$
$$(a_{n-2}) = a_{n-2} e^{(\alpha_{n-2} + \alpha_{n-1} + \alpha_n) i}$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$(a_2) = a_2 e^{(\alpha_2 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_n) i}$$
$$(a_1) = a_1 e^{(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n) i} = a_1 e^{2\pi i} = a_1$$

sind. Da die Summe

$$(a_n) + (a_{n-1}) + \cdots + (a_1) = 0$$

ist; so erhält man, indem man den reellen und den imaginären Theil dieser Summe für sich gleich null setzt, die beiden Formeln

$$a_n cos\alpha_n + a_{n-1} cos(\alpha_{n-1} + \alpha_n) + \cdots + a_2 cos(\alpha_2 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_n) + a_1 = 0$$
$$a_n sin\alpha_n + a_{n-1} sin(\alpha_{n-1} + \alpha_n) + \cdots + a_2 sin(\alpha_2 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_n) = 0$$

Daneben ist $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = 2\pi$.

Obwohl diese Auffassung des Polygons als ein durch Anreihung oder durch Fortschritt entstandenes Polynom die nächstliegende ist; so ist doch die in §. 28 unseres Situationskalkuls vorgeführte Auffassung des Polygons als eine durch Drehung entstandene Figur von ebenso grosser Wichtigkeit, da sie eine besondere Klasse von Eigenschaften der Polygone enthüllt. Danach entsteht das Polygon in der Reihenfolge der Ecken $A_1, A_n, A_{n-1}, A_{n-2} \ldots A_1$ durch die Bewegung eines Punktes A_1, welcher den Endpunkt des in entgegengesetzter Reihenfolge, nämlich in der Folge $A_1 A_2 A_3 \ldots A_n A_1$ genommenen Linienzuges bildet, wenn man diesen Linienzug folgende Bewegungen machen lässt:

1) Fortschritt a_1, wodurch $A_2 A_1 = a_1$ wird,
2) Drehung α_1 um den Nullpunkt O, wodurch $A_2 A_1 = a_1 e^{\alpha_1 i}$ wird,
3) Fortschritt a_2, wodurch $A_3 A_1 = a_2 + a_1 e^{\alpha_1 i}$ wird,
4) Drehung α_2, wodurch $A_3 A_1 = a_2 e^{\alpha_2 i} + a_1 e^{(\alpha_1 + \alpha_2) i}$ wird,
5) Fortschritt a_3, wodurch $A_4 A_1 = a_3 + a_2 e^{\alpha_2 i} + a_1 e^{(\alpha_1 + \alpha_2) i}$ wird,
6) Drehung α_3, wodurch $A_4 A_1 = a_3 e^{\alpha_3 i} + a_2 e^{(\alpha_2 + \alpha_3) i} + a_1 e^{(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) i}$ wird,

u. s. w.

Nach der Drehung α_{n-1} fällt der Punkt A_1 in den negativen Theil der Grundaxe in den Abstand a_n vom Nullpunkte; hierfür ist also $A_n A_1 = -a_n$ oder

$$a_{n-1} e^{\alpha_{n-1} i} + a_{n-2} e^{(\alpha_{n-2} + \alpha_{n-1}) i} + \cdots + a_1 e^{(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{n-1}) i} = -a_n \quad \ldots \quad (I)$$

Jetzt folgt:

Fortschritt a_n, wodurch der Punkt A_1 in den Nullpunkt fällt, also $A_1 A_1 = 0$ wird; man hat also

$$a_n + a_{n-1} e^{\alpha_{n-1} i} + a_{n-2} e^{(\alpha_{n-2} + \alpha_{n-1}) i} + \cdots + a_1 e^{(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{n-1}) i} = 0 \quad \text{(II)}$$

Endlich ergiebt die

Drehung α_n, wodurch der Punkt A_1 im Nullpunkte verbleibt,

$$a_n e^{\alpha_n i} + a_{n-1} e^{(\alpha_{n-1} + \alpha_n) i} + a_{n-2} e^{(\alpha_{n-2} + \alpha_{n-1} + \alpha_n) i} + \cdots + a_1 e^{(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n) i} = 0 \quad \text{(III)}$$

Die Gleichung III ist schon in der Gleichung I enthalten.

Die Zerlegung der Gleichung II in den reellen und imaginären Theil giebt die beiden Formeln

$$a_n + a_{n-1} \cos \alpha_{n-1} + \alpha_{n-2} \cos (\alpha_{n-2} + \alpha_{n-1}) + \cdots + a_1 \cos (\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{n-1}) = 0$$

$$a_{n-1} \sin \alpha_{n-1} + a_{n-2} \sin (\alpha_{n-2} + \alpha_{n-1}) + \cdots + a_1 \sin (\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{n-1}) = 0$$

Diese beiden Formeln drücken ganz dieselben Gsetze aus, wie die aus der ersten Entstehungsweise des Polygons abgeleiteten.

Nach der Gleichung I ist auch, wenn man den Nullpunkt in die Ecke A_2 verlegt und denselben Process vornimmt, indem man also alle Zeiger in dieser Gleichung um eine Einheit erhöht,

$$a_n e^{\alpha_n i} + a_{n-1} e^{(\alpha_{n-1} + \alpha_n) i} + \cdots + a_2 e^{(\alpha_2 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_n) i} = -a_1 \quad \text{(IV)}$$

also wegen Gleichung III

$$e^{(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n) i} = 1$$

oder

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = 2\pi$$

welche Formel mit der dritten obigen Grundformel übereinstimmt.

Raumpolygon. — Für ebene Polygone liefern beide Entstehungsweisen dieselben Formeln, für Raumpolygone jedoch nicht. Für die letzteren erhält man durch das Fortschrittsgesetz die Formeln, welche eine Beziehung zwischen den Seiten und ihrer Deklination und Inklination darstellen. Wenn jetzt $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ die Deklination und $\beta_1, \beta_2 \ldots \beta_n$ die Inklination der Seiten $a_1, a_2 \ldots a_n$ bezeichnen; ergiebt eine Zerlegung der nach dem Fortschrittsgesetze gebildeten Summe

$$a_1 e^{\alpha_1 i} e^{\beta_1 i_1} + a_2 e^{\alpha_2 i} e^{\beta_2 i_1} \cdots = 0$$

in ihren primären, sekundären und tertiären Theil die Formeln

$$a_1 \cos \alpha_1 + a_2 \cos \alpha_2 + \cdots = 0$$

$$a_1 \sin \alpha_1 \cos \beta_1 + a_2 \sin \alpha_2 \cos \beta_2 + \cdots = 0$$

$$a_1 \sin \alpha_1 \sin \beta_1 + a_2 \sin \alpha_2 \sin \beta_2 + \cdots = 0$$

Die Entstehung nach dem Drehungsgesetze erzeugt die Formeln, welche die Beziehungen zwischen den Seiten und deren relativen Richtungen oder deren Neigungen gegeneinander darstellen. Zu dem Ende bezeichnen wir ausser den äusseren Neigungswinkeln α_1, $\alpha_2 \ldots \alpha_n$, welche die Seiten und zwar resp. die Seiten a_1 und a_2, ferner a_2 und a_3 u. s. w., endlich a_n und a_1 gegeneinander haben, mit β_1, $\beta_2 \ldots \beta_n$ die Neigungswinkel, welche die Ebenen $A_1 A_2 A_3$ und $A_2 A_3 A_4$, ferner die Ebenen $A_2 A_3 A_4$ und $A_3 A_4 A_5$ u. s. w. oder welche die Ebenen $a_1 a_2$ und $a_2 a_3$, ferner die Ebenen $a_2 a_3$ und $a_3 a_4$ u. s. w., endlich die Ebenen $a_n a_1$ und $a_1 a_2$ bilden, welche also die Torsionswinkel des Polygons sind, und stellen uns vor, der Eckpunkt A_1 liege im Nullpunkte, die Seite $A_1 A_2$ in der rückwärts verlängerten Grundaxe und die Ebene $A_1 A_2 A_3$ in der Grundebene. Während α_1, $\alpha_2 \ldots$ die äusseren Winkel des Polygons bezeichnen, gelten die Torsionswinkel β_1, $\beta_2 \ldots$ für positiv, wenn der Punkt A_4 unter der Ebene $A_1 A_2 A_3$, ebenso der Punkt A_5 unter der Ebene $A_2 A_3 A_4$ u. s. w. liegt, oder wenn die Ebene $A_1 A_2 A_3$ durch negative Drehung $-\beta_1$ um die Linie $A_2 A_3$ (von A_2 aus gesehen) in die Richtung der Ebene $A_2 A_3 A_4$ gelangt. Jetzt lassen wir einen anfänglich im Nullpunkt A_1 liegenden Punkt A_1 folgende Bewegungen machen:

1) Fortschritt a_1, wodurch $A_2 A_1 = a_1$

2) Drehung α_1 um die tertiäre Axe OZ, wodurch $A_2 A_1$
$= a_1 (\cos \alpha_1 + \sin \alpha_1 \,.\, i) = a_1 \cos \alpha_1 + a_1 \sin \alpha_1 \,.\, i$

3) Drehung β_1 um die primäre Axe OX, wodurch $A_2 A_1$
$= a_1 \cos \alpha_1 + a_1 \sin \alpha_1 \cos \beta_1 \,.\, i + a_1 \sin \alpha_1 \sin \beta_1 \,.\, i i_1$

4) Fortschritt a_2, wodurch $A_3 A_1$
$= a_2 + a_1 \cos \alpha_1 + a_1 \sin \alpha_1 \cos \beta_1 \,.\, i + a_1 \sin \alpha_1 \sin \beta_1 \,.\, i i_1$

5) Drehung α_2 um die tertiäre Axe OZ, wodurch, indem man das primäre und sekundäre Glied mit $\cos \alpha_2 + \sin \alpha_2 \,.\, i$ multiplizirt, von hier an aber zur Abkürzung s_n, c_n für $\sin \alpha_n \cos \alpha_n$, und S_n, C_n für $\sin \beta_n$, $\cos \beta_n$ schreibt, $A_5 A_1$

$$= (a_2 c_2 + a_1 c_1 c_2 - a_1 s_1 s_2 C_1) + (a_2 s_2 + a_1 c_1 s_2 + a_1 s_1 c_2 C_1) i + a_1 s_1 S_1 i i_1$$

6) Drehung β_2 um die primäre Axe OX, wodurch, indem man das sekundäre und tertiäre Glied mit $\cos \beta_2 + \sin \beta_2 \,.\, i$ oder $C_2 + S_2 \,.\, i_1$ multiplizirt, $A_3 A_1$

$$\begin{aligned} = (&a_2 c_2 + a_1 c_1 c_2 - a_1 s_1 s_2 C_1) \\ &+ (a_2 s_2 C_2 + a_1 c_1 s_2 C_2 + a_1 s_1 c_2 C_1 C_2 - a_1 s_1 S_1 S_2) i \\ &+ (a_2 s_2 S_2 + a_1 c_1 s_2 S_2 + a_1 s_1 c_2 C_1 S_2 + a_1 s_1 S_1 C_2) i i_1 \end{aligned}$$

7) Fortschritt a_3, indem man a_3 addirt.

8) Drehung α_3 um die tertiäre Axe, indem man das primäre und sekundäre Glied mit $c_3 + s_3\, i$ multiplizirt.

9) Drehung β_3 um die primäre Axe, indem man das sekundäre und tertiäre Glied mit $C_3 + S_3\, i_1$ multiplizirt.

Indem man in dieser Weise fortfährt, stellen sich die Werthe aller im Eckpunkte A_1 endigenden Diagonalen $A_2 A_1$, $A_3 A_1$, $A_4 A_1$ u. s. w. resp. für den Nullpunkt A_2, A_3, A_4, ... dar. Nach der Drehung β_{n-2} um die primäre Axe trifft der Punkt A_1 in die Grundebene und man erhält den Werth der in die Grundebene fallenden Diagonale $A_{n-1} A_1$. Dieser Werth muss offenbar gleich

$$-a_{n-1} - a_n e^{-\alpha_{n-1} i} = -a_{n-1} - a_n c_{n-1} + a_n s_{n-1} \cdot i$$

sein tertiärer Theil muss also gleich null sein. Hierauf folgt

10) Fortschritt a_{n-1}, indem man a_{n-1} addirt.

11) Drehung α_{n-1} um die tertiäre Axe, indem man das primäre und sekundäre Glied mit $c_{n-1} + s_{n-1} \cdot i$ multiplizirt.

12) Drehung β_{n-1} um die primäre Axe, indem man das sekundäre und tertiäre Glied mit $C_{n-1} + S_{n-1} \cdot i_1$ multiplizirt.

Hierdurch ist der Punkt A_1 in die Grundaxe gefallen, man hat $A_n A_1 = -a_n$, indem sowohl der sekundäre, als auch der tertiäre Theil von $A_n A_1$ gleich null ist. Endlich folgt

13) Fortschritt a_n, indem man a_n addirt. Hierdurch fällt der Punkt A_1 in den Nullpunkt und man erhält $A_1 A_1 = 0$, indem sowohl der primäre, als auch der sekundäre und der tertiäre Theil von $A_1 A_1$ null wird.

14) Drehung α_n um die tertiäre Axe durch Multiplikation des primären und sekundären Gliedes mit $c_n + s_n \cdot i$, wobei $A_1 A_1 = 0$ bleibt.

15) Drehung β_n um die primäre Axe durch Multiplikation des sekundären und tertiären Gliedes mit $C_n + S_n \cdot i_1$, wobei ebenfalls $A_1 A_1$ den Werth null behält.

Die letzten drei Operationen sind für die Ableitung der Grundformeln entbehrlich, indem sich dieselben durch die bis zur Operation (12) gewonnenen Gleichungen folgendermaassen herstellen lassen. Der vor dem Fortschritte (10) gewonnene Werth von $A_{n-1} A_1$ hat die Form

$$A_{n-1} A_1 = X + Yi + Z\, i\, i_1 = -a_{n-1} - a_n c_{n-1} + a_n s_{n-1} i$$

10) Der Fortschritt a_{n-1} liefert

$$(a_{n-1} + X) + Yi + Z i i_1 = -a_n c_{n-1} + a_n s_{n-1} i$$

11) Die Drehung α_{n-1} um die tertiäre Axe ergiebt

$$(a_{n-1} c_{n-1} + X c_{n-1} - Y s_{n-1}) + (a_{n-1} s_{n-1} + X s_{n-1} + Y c_{n-1}) i + Z i i_1 = -a_n$$

12) Die Drehung β_{n-1} um die primäre Axe erzeugt

$$(a_{n-1}c_{n-1} + Xc_{n-1} - Ys_{n-1})$$
$$+ (a_{n-1}s_{n-1}C_{n-1} + Xs_{n-1}C_{n-1} + Yc_{n-1}C_{n-1} - ZS_{n-1})i$$
$$+ (a_{n-1}s_{n-1}S_{n-1} + Xs_{n-1}S_{n-1} + Yc_{n-1}S_{n-1} + ZC_{n-1})ii_1$$
$$= -a_n$$

Aus der Gleichung unter (10) folgen die drei Grundformeln

$$\left.\begin{aligned} a_n c_{n-1} + a_{n-1} + X &= 0 \\ a_n s_{n-1} \qquad\quad - Y &= 0 \\ Z &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (V)$$

Diese Formeln erfüllen auch die Gleichungen unter (11) und (12). In denselben sind alle n Seiten des Polygons, jedoch nur die ersten $n-1$ Winkel vom Zeiger 1 bis $n-1$ verwickelt; erhöht man also die Zeiger aller darin erscheinenden Grössen um eine Einheit, was soviel wie die Verlegung des Nullpunktes in die Ecke A_2 bedeutet; so erscheinen, indem man $a_{n+1} = a_1$ setzt, in jenen Formeln wiederum die n Seiten und daneben die $n-1$ Winkel vom Zeiger 2 bis n. Hierdurch ergeben sich nochmals drei Formeln in der Form

$$\left.\begin{aligned} a_1 c_n + a_n + X_1 &= 0 \\ a_1 s_n \qquad\quad - Y_1 &= 0 \\ Z_1 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (VI)$$

Selbstredend kann man auf diesem Wege durch wiederholte Erhöhung der Zeiger um eine Einheit immer wieder drei neue Formeln herstellen. Das System derselben dient dazu, um die Seiten des Polygons zu eliminiren und zwei Gleichungen herzustellen, welche die Abhängigkeit der n Neigungswinkel $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ und der n Torsionswinkel $\beta_1, \beta_2 \ldots \beta_n$ voneinander ausdrücken.

Die Operationen, durch welche sich diese Formeln ergeben, sind ganz einfache Additionen und Multiplikationen. Wenn schliesslich komplizirte Formeln daraus hervorgehen; so zeigt Diess nur die Komplizirtheit des Problems an und spricht für die Einfachheit des Situationskalkuls, welcher die Lösung solcher Aufgaben mit so wenigen Mitteln ermöglicht. Die vorstehende Rechnung entwickelt die Gesetze jedes beliebigen Raumpolygons, umschliesst also zugleich die Gesetze der körperlichen Ecke von beliebiger Seitenzahl oder die des sphärischen Polygons, wovon das sphärische Dreieck nur ein spezieller Fall ist. Im Nachfolgenden wollen wir einige Spezialitäten betrachten.

Das Dreieck. — Wenn das Polygon nur $n = 3$ Seiten hat, also $n - 1 = 2$ ist, schliesst die Rechnung mit der Formel für A_2A_1 unter (3) und man hat

$$X = a_1 c_1 \quad Y = a_1 s_1 C_1 \quad Z = a_1 s_1 S_1$$

Die drei Gleichungen V werden also

$$a_3 c_2 + a_2 + a_1 c_1 = 0$$
$$a_3 s_2 - a_1 s_1 C_1 = 0$$
$$a_1 s_1 S_1 = 0$$

Da weder a_1, noch s_1 oder $\sin \alpha_1$ gleich null sein kann; so muss wegen der dritten Gleichung S_1 oder $\sin \beta_1$, mithin β_1 gleich null und demnach $C_1 = \cos \beta_1 = 1$ sein. Ein Dreieck kann also nur eben sein und seine Grundformeln sind

$$a_3 \cos \alpha_2 + a_2 + a_1 \cos \alpha_1 = 0$$
$$a_3 \sin \alpha_2 - a_1 \sin \alpha_1 = 0$$

Durch Erhöhung der Zeiger um eine Einheit kömmt

$$a_1 \cos \alpha_3 + a_3 + a_2 \cos \alpha_2 = 0$$
$$a_1 \sin \alpha_3 - a_2 \sin \alpha_2 = 0$$

Nach den die Sinus enthaltenden Formeln ist

$$a_2 = a_1 \frac{\sin \alpha_3}{\sin \alpha_2}, \quad a_3 = a_1 \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2}$$

Eine Substitution der Werthe von a_2 und a_3 in die die Kosinus enthaltenden Gleichungen giebt

$$\sin (\alpha_1 + \alpha_2) = - \sin \alpha_3$$
$$\sin (\alpha_2 + \alpha_3) = - \sin \alpha_1$$

folglich

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 2 \pi$$

Das torquirte Viereck. Für $n = 4$, $n - 1 = 3$ schliesst die Rechnung mit dem unter (6) gefundenen Werthe von $A_3 A_1$; es ist also

$$X = a_2 c_2 + a_1 c_1 c_2 - a_1 s_1 s_2 C_1$$
$$Y = a_2 s_2 C_2 + a_1 c_1 s_2 C_2 + a_1 s_1 c_2 C_1 C_2 - a_1 s_1 S_1 S_2$$
$$Z = a_2 s_2 S_2 + a_1 c_1 s_2 S_2 + a_1 s_1 c_2 C_1 S_2 + a_1 s_1 S_1 C_2$$

Die drei Formeln V werden hierdurch

$$a_4 c_3 + a_3 + a_2 c_2 + a_1 (c_1 c_2 - s_1 s_2 C_1) = 0$$
$$a_4 s_3 - a_2 s_2 C_2 - a_1 (c_1 s_2 C_2 + s_1 c_2 C_1 C_2 - s_1 S_1 S_2) = 0$$
$$a_2 s_2 S_2 + a_1 (c_1 s_2 S_2 + s_1 c_2 C_1 S_2 + s_1 S_1 C_2) = 0$$

Aus den letzten beiden Gleichungen folgt auch die beachtenswerthe Beziehung

$$a_4 s_3 S_2 + a_1 s_1 S_1 = 0$$

oder

$$a_4 \sin \alpha_3 \sin \beta_2 + a_1 \sin \alpha_1 \sin \beta_1 = 0$$

also $$a_4 = -a_1 \frac{\sin\alpha_1 \sin\beta_1}{\sin\alpha_3 \sin\beta_2}$$

Durch wiederholte Erhöhung der Zeiger ergiebt sich

$$a_2 = -a_1 \frac{\sin\alpha_4 \sin\beta_3}{\sin\alpha_2 \sin\beta_2} \quad a_3 = a_1 \frac{\sin\alpha_1 \sin\alpha_4 \sin\beta_4}{\sin\alpha_2 \sin\alpha_3 \sin\beta_2}$$

Substituirt man diese Werthe von a_2, a_3, a_4 in die Formeln V; so verschwinden alle Seiten und es bleiben nur Beziehungen zwischen den Winkeln des Vierecks über. Dieselben sind

$$s_1 s_2 c_3 S_1 + c_2 s_3 s_4 S_3 - s_1 s_4 S_4 - (c_1 c_2 - s_1 s_2 C_1) s_2 s_3 S_2 = 0$$
$$s_1 S_1 - s_4 C_2 S_3 + (c_1 s_2 C_2 + s_1 c_2 C_1 C_2 - s_1 S_1 S_2) S_2 = 0$$
$$s_4 S_3 - c_1 s_2 S_2 - s_1 c_2 C_1 S_2 - s_1 S_1 C_2 = 0$$

Von diesen drei Formeln sind übrigens nur zwei selbstständig. Durch sukzessive Erhöhung der Zeiger um je eine Einheit ergeben sich überhaupt zwölf Beziehungen zwischen den acht Winkeln α_1, α_2, α_3, α_4 und β_1, β_2, β_3, β_4, von welchen mehrere von den übrigen abhängen. Aus diesen Beziehungen müssen sich sämmtliche Neigungswinkel α eliminiren lassen, um eine Relation zwischen den Torsionswinkeln β zurückzulassen, welche ausdrückt, dass $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 = 0$ sei: denn es liegt auf der Hand, dass für jedes geschlossene Polygon die Summe aller Torsionswinkel null ist. Die Torsionswinkel werden sich aber nicht sämmtlich eliminiren lassen, da es für ein torquirtes Polygon keine Beziehung zwischen den Neigungswinkeln geben kann, welche von den Torsionswinkeln unabhängig wäre. Nur soviel lässt sich über die vier Neigungswinkel eines Viereckes allgemein sagen, dass die Summe $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$ der äusseren Winkel ihr Minimum 2π oder die Summe der inneren Winkel ihr Maximum 2π erreicht, wenn alle Torsionswinkel null sind, also das Viereck eben ist, dass dagegen die Summe der äusseren Winkel ihr Maximum 4π oder die Summe der inneren Winkel ihr Minimum null erreicht, wenn sich das Viereck auf ein vierseitiges Zickzack in gerader Linie reduzirt.

Ein torquirtes Viereck kann vier gleiche Winkel α_1, α_2, α_3, α_4 haben, ohne doch vier gleiche Seiten zu besitzen. Wenn aber auch seine vier Seiten a_1, a_2, a_3, a_4 gleich sind; so hängen die Torsionswinkel von dem Werthe ab, welchen jene Neigungswinkel haben: denn nach den für a_2, a_3, a_4 gefundenen Werthen wird nun

$$1 = -\frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2} = -\frac{\sin\beta_3}{\sin\beta_2} = \frac{\sin\beta_4}{\sin\beta_2}$$

Hiernach ist $\beta_1 = -\beta_2 = \beta_3 = -\beta_4$. Das gleichseitige und gleichwinklige Viereck hat also zwei positive und zwei negative Torsionswinkel von gleicher Grösse. Um den Werth dieses Torsionswinkels β zu bestimmen, setzen wir in der dritten der vorstehenden Formeln V

$s_1 = s_2 = s_3 = s_4$, $c_1 = c_2 = \cos\alpha$, $S_1 = -S_2 = S_3 = -S_4$

ferner $C_1 = C_2 = \cos\beta$, erhalten also

$$\cos\beta = \frac{1 + \cos\alpha}{1 - \cos\alpha}$$

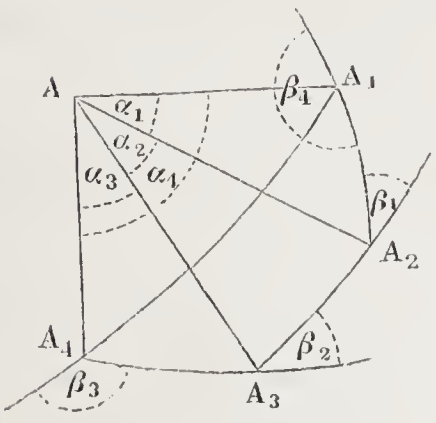
Da α den äusseren Winkel des Viereckes bezeichnet; so ist, wenn α' den inneren Winkel $\pi - \alpha$ darstellt,

$$\cos\beta = \frac{1 - \cos\alpha'}{1 + \cos\alpha'}$$

Hieraus folgt, dass der innere Winkel α' eines Viereckes von gleichen Seiten und gleichen Winkeln stets ein spitzer oder höchstens ein rechter ist (weil ein stumpfer Winkel α' für $\cos\beta$ einen unmöglichen Werthe > 1 fordern würde).

Das sphärische Polygon oder die Ecke. — Die obigen Formeln umfassen nicht bloss das Raumpolygon, sondern auch das sphärische Polygon oder die Ecke. Man braucht darin nur die Seite $a_1 = 1$ und alle folgenden a_2, $a_3 \ldots a_n$ gleich null zu setzen, ferner unter α_1, $\alpha_2 \ldots$ die Bögen A_1A_2, A_2A_3 (Fig. 30), oder die Kantenwinkel A_1AA_2, $A_2AA_3 \ldots$ und unter β_1, $\beta_2 \ldots$ die äusseren Winkel des sphärischen Polygons $A_1A_2A_3A_4 \ldots$ an den Ecken $A_2, A_3 \ldots$ zu verstehen und zu beachten, dass dieses sphärische Polygon eine Ecke weniger hat, als das torquirte Polygon $AA_1A_2A_3A_4 \ldots$, für welches die obigen Formeln gelten.

Fig. 30.



Bei der ursprünglichen Lage der Ecke $AA_1A_2A_3 \ldots$ liegt A_1 im Nullpunkte, A_1A in der rückwärts verlängerten Grundaxe und A_1AA_2 in der Grundebene. Nach der vorhin erwähnten Drehung β_{n-2} um die primäre Axe fällt der Punkt A_1 wieder in die Grundebene und man hat jetzt

$$AA_1 = e^{-a_{n-1}i} = c_{n-1} - s_{n-1} \cdot i$$

Ergiebt sich nun wie vorhin durch die Drehungen AA_1 in der Form

$$AA_1 = X + Yi + Zii_1$$

so hat man statt V die drei Grundformeln

$$c_{n-1} - X = 0$$
$$s_{n-1} + Y = 0$$
$$Z = 0$$

Für das sphärische Dreieck ist $n = 4$, also nach der vorhin unter (3) erwähnten Drehung β_2

$$X = c_1 c_2 - s_1 s_2 C_1$$
$$Y = c_1 s_2 C_2 + s_1 c_2 C_1 C_2 - s_1 S_1 S_2$$
$$Z = c_1 s_2 S_2 + s_1 c_2 C_1 S_2 + s_1 S_1 C_2$$

Hierdurch werden die drei Formeln V

$$c_3 - c_1 c_2 + s_1 s_2 C_1 = 0$$
$$s_3 + c_1 s_2 C_2 + s_1 c_2 C_1 C_2 - s_1 S_1 S_2 = 0$$
$$c_1 s_2 S_2 + s_1 c_2 C_1 S_2 + s_1 S_1 C_2 = 0$$

Dieselben stellen die drei Grundformeln der sphärischen Trigonometrie dar. Statt der beiden letzten kann man auch schreiben

$$s_1 S_1 = s_3 S_2$$
$$c_1 s_2 + s_3 C_2 + s_1 c_2 C_1 = 0$$

Diese Vereinfachung der beiden letzten der Formeln V hat eine allgemeine Bedeutung; sie beruht auf folgender Umformung. Nach der obigen Ableitung erhält man für den Vektor des in die Grundebene fallenden Punktes A zwei Ausdrücke in der Form

$$X + Yi + Zii_1 \text{ und } A + Bi$$

welche einander gleich sein müssen und daher zu den drei Formeln V

$$X = A \quad Y = B \quad Z = 0$$

führen. Der erste Ausdruck jenes Vektors ergiebt sich, sobald man die Drehung α_{n-2} um die tertiäre Axe und die Drehung β_{n-2} um die primäre Axe an einem Vektor vollzogen hat, welcher sich vor diesen beiden Drehungen, also nach Vollzug der Drehung α_{n-3} um die tertiäre, der Drehung β_{n-3} um die primäre Axe und des Fortschrittes a_{n-2} in der Form

$$X' + Y'i + Z'ii_1$$

herausgestellt hatte. Hierdurch werden die Formeln V

$$X = X' c_{n-2} - Y' s_{n-2} = A$$
$$Y = (X' s_{n-2} + Y' c_{n-2}) C_{n-2} - Z' S_{n-2} = B$$
$$Z = (X' s_{n-2} + Y' c_{n-2}) S_{n-2} + Z' C_{n-2} = 0$$

Die erste dieser drei Formeln gestattet keine Abkürzung, wohl aber die letzten beiden. Man findet leicht, dass sich das System dieser drei Formeln durch das folgende ersetzen lässt:

$$\left.\begin{aligned} X' c_{n-2} - Y' s_{n-2} &= A \\ X' s_{n-2} + Y' c_{n-2} &= B C_{n-2} \\ Z' &= -B S_{n-2} \end{aligned}\right\} \quad \text{(VII)}$$

Um dieselben auf das sphärische Viereck oder für $n = 5$ anzuwenden; so sind (weil $a_{n-2} = 0$ ist) die Werthe von X', Y', Z' dieselben, welche soeben für das sphärische Dreieck mit X, Y, Z bezeichnet waren. Da ausserdem $n - 1 = 4$, $n - 2 = 3$, $A = c_4$, $B = -s_4$ ist; so werden die Formeln VII

$$c_4 - c_1 c_2 c_3 + s_1 s_2 c_3 C_1 + c_1 s_2 s_3 C_2 + s_1 c_2 s_3 C_1 C_2 - s_1 s_3 S_1 S_2 = 0$$
$$s_4 C_3 + c_1 c_2 s_3 - s_1 s_2 s_3 C_1 + c_1 s_2 c_3 C_2 + s_1 c_2 c_3 C_1 C_2 - s_1 c_3 S_1 S_2 = 0$$
$$s_4 S_3 - c_1 s_2 S_2 - s_1 c_2 C_1 S_2 - s_1 S_1 C_2 = 0$$

Diess sind die Grundformeln des sphärischen Viereckes.

Abkürzung der Formeln. Indem man, von einer Ecke des Polygons anfangend, das ganze Polygon umkreist (Fig. 29), erhält man die Gleichung

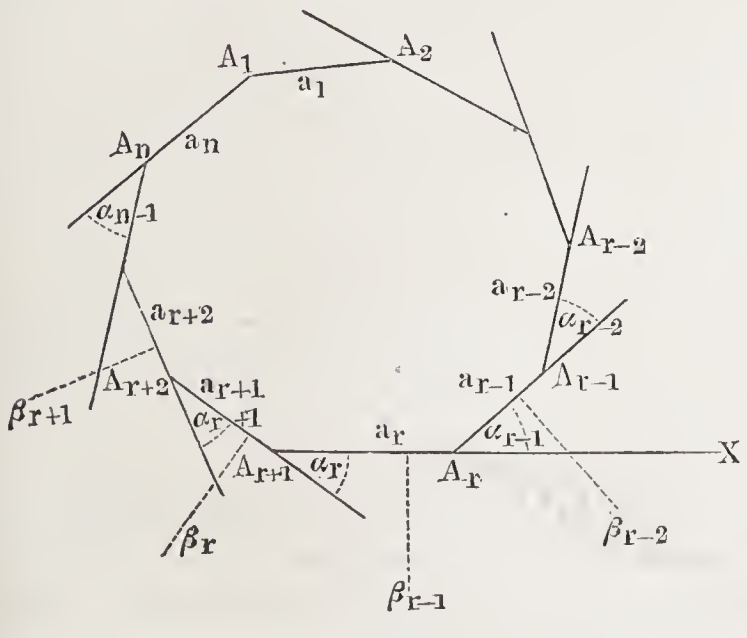
$$(a_n) + (a_{n-1}) + \cdots + (a_2) + (a_1) = 0$$

welche ausdrückt, dass die algebraische Summe aller Seiten gleich null ist. Diese Gleichung liefert drei Grundformeln, in welchen der letzte Deklinationswinkel α_n und der letzte Inklinationswinkel β_n nur in einfacher Weise mit anderen Grössen verknüpft erscheint, also leicht als eine Funktion dieser Grössen zu bestimmen ist. Die Glieder, welche die ersten Deklinations- und Inklinationswinkel α_1 und β_1 enthalten, nehmen die ziemlich grosse Zahl von $n + 1$ Faktoren auf. Diese Faktorenzahl der einzelnen Glieder und damit auch die Gesammtzahl aller Glieder lässt sich auf ein Minimum bringen, wenn man das Polygon von dem Punkte A_1 aus nicht nach einunddersel ben Seite in ununterbrochenem Zuge, sondern nach den beiden entgegengesetzten Seiten bis zu dem mittleren Eckpunkte durchläuft, also durch die Formel

$$(a_n) + (a_{n-1}) + \cdots + (a_r) = -(a_1) - (a_2) - \cdots - (a_{r-1})$$

ausdrückt, dass der Weg $A_1 A_n A_{n-1} \ldots A_r$ in denselben Punkt A_r führt wie der Weg $A_1 A_2 A_3 \ldots A_r$. Hierdurch reduzirt sich die Zahl der Faktoren und Glieder der Grundformeln auf die Hälfte, man erhält also die denkbar einfachsten Formeln.

Fig. 31.



Zur Herstellung der letzteren Formel denke man sich nach Fig. 31 die Ecke A_r als Nullpunkt, die Seite $A_r A_{r+1}$ als die rückwärts verlängerte Grundaxe, also $A_r X$ als positive Grundaxe und die Ebene $A_r A_{r+1} A_{r+2}$

als Grundebene XY. Die obigen Operationen (1) bis (12) liefern dann sukzessiv die Werthe von $A_2 A_1$, $A_3 A_2 A_1$ und endlich den Werth des Zuges

$$A_r A_{r-1} \ldots A_1 = (a_{r-1}) + (a_{r-2}) + \cdots + (a_1)$$

sobald man jetzt r an die Stelle des in (10), (11) und (12) gebrauchten Buchstabens n setzt. Den Werth des von A_r in entgegengesetzter Richtung ebenfalls nach A_1 führenden Zuges

$$A_r A_{r+1} \ldots A_n A_1 = -(a_r) - (a_{r+1}) - \cdots - (a_n)$$

findet man für denselben Nullpunkt A_r, dieselbe Grundaxe $A_r X$ und dieselbe Grundebene $A_r A_{r+1} A_{r+2}$, indem man beachtet, dass jetzt sukzessiv die negativen Fortschritte $-a_n$, $-a_{n-1}$, ... und dazwischen je zwei negative Drehungen

$$-\beta_{n-1}, \quad -\alpha_{n-1}, \quad \text{dann} \quad -\beta_{n-2}, \quad -\alpha_{n-2} \text{ u. s. w.}$$

resp. um die primäre und tertiäre Axe zu machen sind, was je zwei Multiplikationen der sekundären und tertiären Glieder mit $C - S i_1$, resp. der primären und tertiären Glieder mit $c - s i$ erfordert, und dass die Operation mit den Drehungen $-\beta_r$, $-\alpha_r$ und dem darauf folgenden Fortschritte $-a_r$ schliesst. Der Anfang dieser Rechnung ist also

1) $A_n A_1 = -a_n$

2) $\quad -a_n$

3) $\quad -a_n c_{n-1} + a_n s_{n-1} i$

4) $A_{n-1} A_n A_1 = a_{n-1} - a_n c_{n-1} + a_n s_{n-1} i$

5) $-a_{n-1} - a_n c_{n-1} + a_n s_{n-1} C_{n-1} i - a_n s_{n-1} S_{n-1} i i_1$

6) $(-a_{n-1} c_{n-2} - a_n c_{n-1} c_{n-2} + a_n s_{n-1} s_{n-2} C_{n-1})$
$+ (a_{n-1} s_{n-2} + a_n c_{n-1} s_{n-2} + a_n s_{n-1} c_{n-2} C_{n-1}) i$
$- a_n s_{n-1} S_{n-1} i i_1$

7) $A_{n-2} A_{n-1} A_n A_1$
$= (-a_{n-2} - a_{n-1} c_{n-2} - a_n c_{n-1} c_{n-2} + a_n s_{n-1} s_{n-2} C_{n-1})$
$+ (a_{n-1} s_{n-2} + a_n c_{n-1} s_{n-2} + a_n s_{n-1} c_{n-2} C_{n-1}) i$
$- a_n s_{n-1} S_{n-1} i i_1$

Die Schlussformel für $A_r A_{r+1} \ldots A_n A_1$ beginnt mit den Gliedern $-a_r - a_{r+1} c_r$ — etc. Diese Formel ist ebenso gebildet wie die Formel der von A_r rechts herum führenden Züge, wenn man allen Seiten a und allen Sinus s und S entgegengesetzte Zeichen giebt.

Eine Gleichsetzung der Werthe von $A_r A_{r-1} \ldots A_1$ und $A_r A_{r+1} \ldots A_n A_1$ oder ihrer primären, sekundären und tertiären Glieder liefert die gesuchten Grundformeln. Es leuchtet ein, dass man in diesen Formeln alle Zeiger um jede beliebige Zahl vergrössern oder verkleinern kann,

weil die beiden Züge bei A_1 nicht bloss zusammentreffen, sondern gesetzlich ineinander übergehen.

§. 11.

Flächengrössen.

Das Polyeder. — Jedes Linienpolyeder kann wie ein Polygon angesehen und behandelt werden, wobei, um einen zusammenhängenden Zug zu erhalten, manche Seite mehr als einmal durchlaufen werden muss. Hiernach bedarf das Linienpolyeder keiner weiteren Berücksichtigung, wohl aber das Flächenpolyeder, d. h. die Flächengrösse, welche einen Raum begrenzt oder einschliesst.

Aus dem vierten Abschnitte unseres Situationskalkuls geht hervor, dass die Flächen in Beziehung auf Fortschritt, Drehung und Wälzung ganz denselben Gesetzen unterworfen sind wie die Linien. Unter der Deklination einer Fläche verstehen wir die Drehung einer in der Grundebene liegenden Fläche um die Nulllinie, unter Inklination dagegen die Wälzung der so entstehenden Flächen um eine auf der Grundebene normal stehende unverrückbare Axe. Welche Ebene man zur Grundebene und welche Linie darin man zur Nulllinie annehmen will, ist gleichgültig. Im Situationskalkul, §. 49, habe ich die Flächen um dieselben Axen deklinirt und inklinirt, wie die Linien und demzufolge YZ zur primären, ZX zur sekundären und XY zur tertiären Ebene angenommen. In den „Naturgesetzen“ dagegen habe ich die primäre Axe OX zur Nulllinie der Flächen und demzufolge XY zur primären, XZ zur sekundären und YZ zur tertiären Ebene angenommen, was auch nachstehend geschehen soll.

In jedem Falle ist die algebraische Summe sämmtlicher Flächen $A_1, A_2, A_3 \ldots A_n$, welche einen Raum nach allen Seiten abschliessen, gleich null, wobei alle Flächen so zu nehmen sind, dass ihre Normalen sämmtlich nach aussen oder sämmtlich nach innen gekehrt sind. Hierzu sind mindestens vier ebene Flächen oder ein Tetraeder erforderlich, welches die Gleichung $(A_1) + (A_2) + (A_3) + (A_4) = 0$ ergiebt. Die Summe mehrerer Flächen, welche einen Raum nicht vollständig abschliessen, ist gleich der Summe derjenigen Flächen, welche die offenen Lücken decken, wobei die Normalen der ersteren nach aussen und die der letzteren nach innen gerichtet sind; man hat also für zwei Flächen eines Tetraeders $(A_1) + (A_2) = -[(A_3) + (A_4)]$ und für drei Flächen $(A_1) + (A_2) + (A_3) = -(A_4)$.

Um die Formeln des Polygons ohne Weiteres auf ein Polyeder anzuwenden, kömmt es nur darauf an, eine Reihenfolge unmittelbar benachbarter, d. h. durch eine Kante miteinander verbundener Seitenflächen zu

ermitteln, in welcher das ganze Polyeder abgewickelt oder beschrieben werden kann, sodass ein ununterbrochener Flächenweg in einem einzigen Zuge von der ersten Fläche A_1 bis zur letzten Fläche A_n führt. Wenn ein solcher Weg gefunden ist, hat man

$$(A_1) + (A_2) + (A_3) + \cdots + (A_n) = 0$$

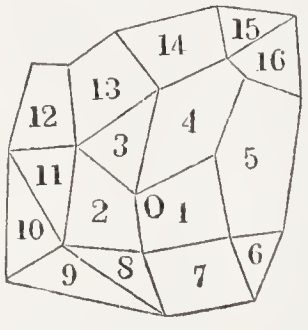
Kürzere Formeln ergeben sich, wenn man einen Zug ermittelt, welcher nicht bloss das ganze Polyeder beschreibt, sondern auch in sich selbst zusammenläuft, also zu der Ausgangsfläche A_1 zurückkehrt. Für einen solchen Zug kann man einmal rechts herum von der Fläche A_{r-1} bis zur Fläche A_1 und einmal links herum von der Fläche $-A_r$ bis zur Fläche $-A_n$ gehen, um die Formel

$$(A_{r-1}) + (A_{r-2}) + \cdots + (A_1) = -(A_r) - (A_{r+1}) - \cdots - (A_n)$$

zu bilden.

Einen Zug der ersten Art erhält man nach Fig. 32 folgendermaassen. Irgend ein Eckpunkt sei 0; um denselben liegt ein Kranz von Flächen, welche in der Figur mit 1, 2, 3, 4 bezeichnet sind, um diesen Kranz fügt sich ein zweiter Kranz 5, 6, 7 ... 16, um diesen ein dritter u. s. f. Beginnt man also bei der Fläche, um in der Reihenfolge der Nummern erst den ersten, dann den zweiten, dann den dritten und so alle folgenden Kränze zu durchlaufen; so endigt man schliesslich mit einer spiralförmig nach derselben Seite sich herumziehenden Bewegung in der letzten Fläche des Polyeders. Singuläre Polyeder können durch die eigenthümliche Konfiguration der Kränze vielleicht die mehrmalige Durchschreitung gewisser Flächen nöthig machen, wie es auch bei den Polygonen der Fall ist.

Fig. 32.

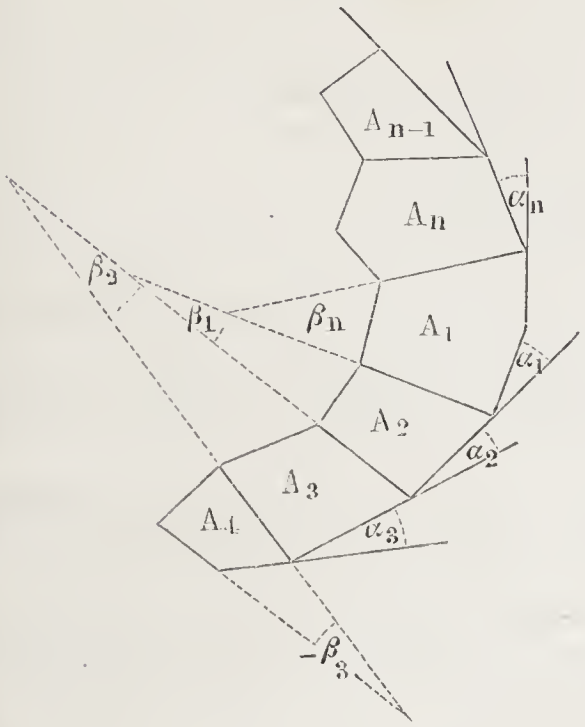


Um eine nach der ersten Fläche 1 zurückkehrende Reihenfolge zu erhalten, beschreibt man von dem ersten Kranze in rechtläufiger Bewegung nur ein Stück, z. B. 1, 2, tritt dann in den zweiten Kranz über und beschreibt darin in umgekehrter Bewegung ein Stück wie 8, 7, 6, 5, welches bis an die im ersten Kranze gelassene Lücke heranreicht, geht hierauf in den dritten Kranz über, um daselbst in ähnlicher Weise, jedoch immer in einer der letzten entgegengesetzten Bewegung ein Stück zu durchlaufen. Nachdem auf diese Weise der letzte Kranz erreicht und voll durchlaufen ist, kehrt man durch die in den einzelnen Kränzen gelassenen Lücken zurück, um in der unmittelbar an die erste Fläche 1 angrenzenden Fläche 4 zu endigen.

Auf diese Weise ist nicht bloss ein zurückkehrender, sondern auch ein bei 1 und 4 gesetzlich ineinander übergehender Zug gefunden, in dessen Formel alle Zeiger um jede beliebige Zahl erhöht und erniedrigt werden können.

Geht man in diesem Zuge einmal von der Fläche A_{r-1} über A_{r-2} nach A_1 und einmal in entgegengesetzter Richtung von A_r über A_{r+1} nach A_n; so finden unmittelbar die zuletzt für das Polygon aufgestellten Formeln Anwendung, indem man die Linien a_1, a_2 ... a_n mit den Flächen A_1, A_2 ... A_n vertauscht, ferner nach Fig. 33 die Winkel α_1, α_2, ... α_n als die äusseren Neigungswinkel zwischen den Flächen A_1 und A_2, A_2 und A_3, ... A_n und A_1, endlich die Winkel β_1, β_2, ... β_n als die Winkel zwischen den Kanten der Ebenen $A_1\,A_2$ und $A_2\,A_3$, ferner der Ebenen $A_2\,A_3$ und $A_3\,A_4$ u. s. w., endlich der Ebenen $A_n\,A_1$ und $A_1\,A_2$ ansieht. Die Zeichen der Winkel α sind nicht zweifelhaft; die Winkel β gelten wie bei $\beta_n, \beta_1, \beta_2$ für positiv, wenn in der Abwicklung des Polyeders die betreffenden Kanten nach links konvergiren, dagegen für negativ, wenn sie, wie bei $-\beta_3$, nach rechts konvergiren.

Fig. 33.



Das Tetraeder. — Das in Fig. 34 dargestellte und in Fig. 35 abgewickelte Tetraeder kann in dem wiederkehrenden Zuge $A_1\,A_2\,A_3\,A_4$

Fig. 34.

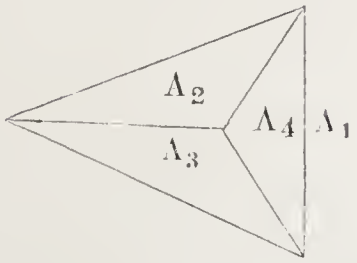
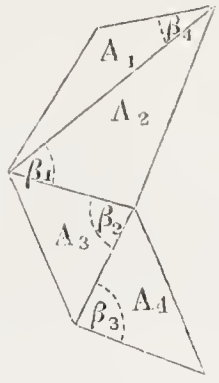


Fig. 35.



durchlaufen werden. Geht man also einmal von A_2 auf A_1 und einmal von A_3 auf A_4 über; so hat man für den ersten Zug

$$(A_2) + (A_1) = A_2\,c_2 + A_1\,c_1\,c_2 - A_1\,s_1\,s_2\,C_1$$
$$+ (A_2\,s_2\,C_2 + A_1\,c_1\,s_2\,C_2 + A_1\,s_1\,c_2\,C_1\,C_2 - A_1\,s_1\,S_1\,S_2)\,i$$
$$+ (A_2\,s_2\,S_2 + A_1\,c_1\,s_2\,S_2 + A_1\,s_1\,c_2\,C_1\,S_2 + A_1\,s_1\,S_1\,C_2)\,ii_1$$

Für den zweiten Zug ist nach dem letzten Ausdrucke (4)

$$-(A_3) - (A_4) = -A_3 - A_4\,c_3 + A_4\,s_3\,i$$

Aus der Gleichsetzung dieser beiden Ausdrücke ergeben sich die Formeln

$$A_4 c_3 + A_3 + A_2 c_2 + A_1 c_1 c_2 - A_1 s_1 s_2 C_1 = 0$$
$$A_4 s_3 - A_2 s_2 C_2 - A_1 c_1 s_2 C_2 - A_1 s_1 c_2 C_1 C_2 + A_1 s_1 S_1 S_2 = 0$$
$$A_2 s_2 S_2 + A_1 c_1 s_2 S_2 + A_1 s_1 c_2 C_1 S_2 + A_1 s_1 S_1 C_2 = 0$$

Aus den letzten beiden Gleichungen folgt die beachtenswerthe Beziehung

$$A_1 s_1 S_1 + A_4 s_3 S_2 = 0$$

oder

$$A_1 \sin \alpha_1 \sin \beta_1 = A_4 \sin \alpha_3 \sin \beta_2 = 0$$

oder

$$\frac{A_1}{A_4} = \frac{\sin \alpha_3 \sin \beta_2}{\sin \alpha_1 \sin \beta_1}$$

worin β_1 und β_2 die positiven Werthe der in Fig. 35 dargestellten inneren Winkel der Seitenflächen bezeichnen (welche in den vorhergehenden allgemeinen Formeln für das gegenwärtige Beispiel entgegengesetzte Zeichen haben).

In dem regelmässigen Tetraeder sind alle Seitenflächen und alle äusseren Winkel α unter sich gleich, die Winkel β aber haben gleiche absolute Grösse, jedoch abwechselnd entgegengesetzte Zeichen; es ist also $S_1 = -S_2 = S_3 = -S_4$. Hierdurch werden die drei Grundformeln

$$1 + 2c + c^2 - s^2 C = 0$$
$$1 - C - c C - c C^2 - S^2 = 0$$
$$1 + c + c C - C = 0$$

Danach ist

$$c = \cos \alpha = -\frac{1}{3}$$

$$C = \cos \beta = \frac{1}{2}$$

Das Pentaeder. — Die Formeln für das Pentaeder ergeben sich, indem man den vorstehenden Ausdruck für $(A_2) + (A_1)$ dem Ausdrucke für $-(A_3) - (A_4) - (A_5)$ gleich setzt. Der letztere ist nach dem Ausdrucke (7)

$$- A_3 - A_4 c_3 - A_5 c_4 c_3 + A_5 s_4 s_3 C_4$$
$$+ (A_4 s_3 + A_5 c_4 s_3 + A_5 s_4 c_3 C_4) i - A_5 s_4 S_4 i i_1$$

Man hat also die Grundformeln

$$A_5 s_4 s_3 C_4 - A_5 c_4 c_3 - A_4 c_3 - A_3 - A_2 c_2 - A_1 c_1 c_2 + A_1 s_1 s_2 C_1 = 0$$
$$A_5 s_4 c_3 C_4 + A_5 c_4 s_3 + A_4 s_3 - A_2 s_2 C_2 - A_1 c_1 s_2 C_2 - A_1 s_1 c_2 C_1 C_2 + A_1 s_1 S_1 S_2 = 0$$
$$A_5 s_4 S_4 + A_2 s_2 S_2 + A_1 c_1 s_2 S_2 + A_1 s_1 c_2 C_1 S_2 + A_1 s_1 S_1 C_2 = 0$$

Der Flächenvektor. — Die Fläche, welche ein Flächenpolyeder schliesst, bildet den Vektor für den aus allen übrigen Flächen gebildeten Flächenzug und ist diesem Zuge algebraisch gleich. Was ihren absoluten

Flächeninhalt betrifft; so ist dessen Quadrat die Summe der Quadrate der Projektionen des letzteren Zuges auf drei rechtwinklige Ebenen. Hat man also für die einzelnen Seitenflächen

$$(A_1) = X_1 + Y_1\, i + Z_1\, i\, i_1$$
$$(A_2) = X_2 + Y_2\, i + Z_2\, i\, i_1$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$(A_{n-1}) = X_{n-1} + Y_{n-1}\, i + Z_{n-1}\, i\, i_1$$
$$(A_n) = X_n + Y_n\, i + Z_n\, i\, i_1$$

so ist $-(A_n)$ der Flächenvektor von $(A_1) + (A_2) + \cdots + (A_{n-1})$ und nach dem Flächeninhalte

$$A_n^2 = X_n^2 + Y_n^2 + Z_n^2$$
$$= (X_1 + X_2 + \cdots)^2 + (Y_1 + Y_2 + \cdots)^2 + (Z_1 + Z_2 + \cdots)^2$$

Für ein rechtwinkliges Tetraeder, in welchem drei rechtwinklige Flächen X, Y, Z über der Basis A zusammenstossen, ist das Quadrat der Basis

$$A^2 = X^2 + Y^2 + Z^2$$

und wenn man die Katheten der rechtwinkligen Dreiecke X, Y, Z mit a, b, c bezeichnet, sodass $X = \frac{1}{2}\, a\, b$, $Y = \frac{1}{2}\, b\, c$, $Z = \frac{1}{2}\, c\, a$ ist; so hat man für den Flächeninhalt des Dreieckes A

$$A = \tfrac{1}{2} \sqrt{a^2\, b^2 + b^2\, c^2 + c^2\, a^2}$$

Die Seiten des Dreieckes A sind

$$p = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad q = \sqrt{b^2 + c^2} \qquad r = \sqrt{c^2 + a^2}$$

man hat also

$a^2 = \frac{1}{2}\,(p^2 + r^2 - q^2)$, $b^2 = \frac{1}{2}\,(p^2 + q^2 - r^2)$, $c^2 = \frac{1}{2}\,(q^2 + r^2 - p^2)$

und daher ist die Fläche eines Dreieckes, dessen Seiten p, q, r sind,

$$\tfrac{1}{4} \sqrt{\{(p^2 + r^2 - q^2)\,(p^2 + q^2 - r^2) + (p^2 + q^2 - r^2)\,(q^2 + r^2 - p^2) + (q^2 + r^2 - p^2)\,(p^2 + r^2 - q^2)\}}$$

oder

$$= \tfrac{1}{4} \sqrt{(p + q + r)\,(p + q - r)\,(p + r - q)\,(q + r - p)}$$

worin man eine bekannte Formel der Trigonometrie erkennt.

§. 12.

Körper und vierdimensionale Grössen.

Der Situationskalkul stellt, wie sich aus Vorstehendem ergiebt, nicht bloss die geometrischen Gesetze der Linien, sondern mit denselben Mitteln und derselben Leichtigkeit auch die der Flächen dar: er ist

überhaupt die abstrakte Auffassung des Raumes, enthält also auch die Gesetze der Körper, ja, als Begriffsabstraktion geht er über die Grenzen des Anschauungsgebietes hinaus und umfasst die Grössen von vier und mehr Dimensionen. Die Letzteren haben in neuerer Zeit die Aufmerksamkeit in erhöhtem Maasse auf sich gezogen, namentlich ist die auf die dreidimensionalen Körper zunächst folgende Qualitätsstufe unter dem Namen des vierdimensionalen Raumes ein Gegenstand von Betrachtungen und Rechnungen geworden. Dass die Zahlenreihe nicht mit den drei Gliedern 1, 2, 3 erschöpft sei, dass sich also sowohl diese Reihe, als auch die Reihe der Potenzen λ^1, λ^2, λ^3 unbeschränkt fortsetze, ist ein ebenso wahrer, wie nahe liegender und alter Gedanke, welchem jedoch die richtige Erkenntniss fehlt. Die jüngsten Erörterungen desselben, soweit sie mir bekannt geworden, haben den Gegenstand durchaus nicht aufgeklärt, sondern aus willkürlichen Sätzen ein System von Irrthümern aufgebaut, welches den vierdimensionalen Raum zu einem Zauberkreise des Spiritismus macht.

Unsere Ansichten über den vierdimensionalen Raum sind in den „Naturgesetzen“, namentlich bei den Hauptstufen der Drehung in §. 490, S. 167 ff., ferner bei den Hauptstufen der Form in §. 494, S. 263 ff., bei dem Kardinalprinzipe in §. 497 und sodann in der gegenwärtigen Schrift §. 4 niedergelegt. Sie lassen das vierdimensionale Grössengebiet in logischer Entwicklung der Prinzipien des Situationskalkuls als die gesetzlich an den dreidimensionalen Raum sich anreihende Haupt-Qualitätsstufe erscheinen, ohne irgend eine willkürliche Deutung oder Hypothese zu gestatten. Logische Erkenntniss oder Begriff ist aber keine Anschauung; die im dritten Theile unserer „Naturgesetze“ behandelte Erkenntniss ist eine ganz andere, freiere, qualitativ höhere Geistesfraktion, als die im ersten Theile behandelte Anschauung. Die logische Erkenntniss des vierdimensionalen Grössengebietes darf daher nicht mit der Anschauung desselben verwechselt werden: ebenso sehr wie der arithmetische oder logische Begriff der Vielheit von 3 Einheiten sich von der Anschauung einer Linie von 3 Längeneinheiten oder einer Fläche von 3 Flächeneinheiten oder einer Masse von 3 Pfund unterscheidet, indem jener Begriff der abstrakte Repräsentant jeder möglichen anschaulichen Grösse von 3 wirklichen Einheiten ist, ebenso sehr unterscheidet sich der Begriff des vierdimensionalen Grössengebietes von der Anschauung desselben. Wie ist nun diese letztere Anschauung beschaffen?

Wir glauben, der Wissenschaft durch die Charakteristik des anschaulichen und des logischen Kardinalprinzipes in §. 497 der „Naturgesetze“ einen Dienst geleistet und darin die merkwürdige Thatsache nachgewiesen zu haben, dass das Anschauungsgebiet und demzufolge das System der anschaulichen Grundeigenschaften ein bestimmt begrenztes, endliches, abgeschlossenes, in sich selbst wiederkehrendes, das Erkenntnissgebiet dagegen und demnach das System der begrifflichen oder intellektuellen Grundeigenschaften ein

unbegrenztes, unendliches, offenes, sich unausgesetzt entwickelndes ist. Das Anschauungsgebiet schliesst mit drei Neutralitätsstufen (dem Primären, Sekundären und Tertiären) und mit vier Qualitätsstufen (dem Undimensionalen, Eindimensionalen, Zweidimensionalen und Dreidimensionalen) definitiv ab; das Erkenntnissgebiet kennt keine Beschränkung der Stufenfolge weder in der Neutralität, noch in der Qualität; die Neutralitätsstufen 1, $\sqrt{-1}$, $\sqrt{-1}\ \sqrt{\div 1}$, $\sqrt{-1}\ \sqrt{\div 1}\ \sqrt{\div 1}$ u. s. w. oder 1, i, $i\,i_1$, $i\,i_1\,i_2$ etc., ebenso wie die Qualitätsstufen $\lambda^0, \lambda^1, \lambda^2, \lambda^3, \lambda^4 \ldots$ sind unbegrenzt.

Hiernach giebt es von dem vierdimensionalen Raume wohl einen Begriff, aber keine Anschauung: die vierte Dimension existirt in unserem Verstande als Abstraktion, nicht aber im Anschauungsvermögen als wirkliche Raumgrösse. Die vierte geometrische Dimension hat also keine Ausdehnung, die vierte chronologische Dimension keine Dauer, die vierte mechanische Dimension keine Beschleunigungstendenz (Kraft), die vierte chemilogische Dimension keine Verbindungsfähigkeit (Affinität), die vierte physiometrische Dimensität keinen Gestaltungstrieb.

Wenn die vierte Dimension keine Ausdehnung hat, besitzt sie auch keine anschauliche Richtung und bedingt keine Ortsverschiedenheit der ihr zugehörigen Punkte. Eine vierdimensionale geometrische Grösse unterscheidet sich also von einem dreidimensionalen Körper anschaulich gar nicht, sondern nur begrifflich und zwar in der Art, dass man jeden Punkt dieses Körpers wie eine Grösse denken muss, in welcher sich die vierte Dimension (etwa wie eine Dichtigkeit oder Massenhaftigkeit) verhüllt, indem sie auf allen durch diesen Punkt gelegten drei rechtwinkligen oder neutralen Axen (der primären, sekundären und tertiären Richtung), also überhaupt auf jeder Linie normal steht.

Wenngleich nun der vierdimensionale Raum in der Anschauung gar nicht existirt; so ist er doch als Glied in der Reihe der aus der Anschauung abstrahirten Begriffe unentbehrlich, ja, was sehr bemerkenswerth ist, er ist sogar zur logischen Entwicklung und Erkenntniss der Gesetze der anschaulichen ein-, zwei- und dreidimensionalen Grössen unbedingt nothwendig. Diess erhellt sofort durch die Erwägung, dass jede eindimensionale Linie durch Drehung oder Krümmung aus dem eindimensionalen Gebiete, welchem sie ursprünglich angehört, in die zweidimensionale Ebene und dass die zweidimensionale Fläche durch Drehung oder Krümmung in den dreidimensionalen Raum eindringt. Ebenso tritt der dreidimensionale Körper durch die der Drehung oder Krümmung analogen Prozesse in den vierdimensionalen Raum ein; seine Gesetze können also ohne den Begriff dieses Raumes in Vollständigkeit nicht verstanden werden.

Wie die Grösse, der Ort, die Richtung, die Dimensität und die Form einer Fläche etwas ganz Anderes ist, als die Grösse, der Ort, die Richtung, die Dimensität und die Form einer Linie, so ist auch die Grösse, der

Ort, die Richtung, die Dimensität und die Form, überhaupt jede Grundeigenschaft eines Körpers etwas ganz Anderes, als die gleichnamige Grundeigenschaft einer Fläche, einer Linie, eines Punktes. Ebenso hat jeder Grundprozess oder jede Grundoperation eines Körpers, also die kubische Erweiterung, der kubische Fortschritt, die kubische Drehung, die kubische Dimensionirung (Expansion), die kubische Gestaltung eine andere Bedeutung, als der gleichnamige Prozess der Flächen, der Linien, der Punkte. Das Nämliche gilt von den Grundeigenschaften und Grundoperationen der vierdimensionalen Grössen.

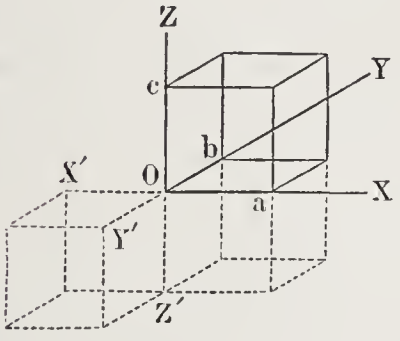
Die Erweiterung eines Körpers geschieht durch Hinausrückung seiner Oberfläche. Der Fortschritt eines Körpers erfolgt im Raume durch Anreihung von Körpervolumen. Die Drehung eines Körpers ist ein eigenthümlicher, in §. 490 und 497 der Naturgesetze und in den letzten Paragraphen der gegenwärtigen Schrift erläuterter Prozess. Die Dimensionirung oder Dimensitätserhöhung eines Körpers ist die Expansion in dem vierdimensionalen Raume, wobei jeder seiner Punkte (nicht etwa jeder Punkt seiner Oberfläche) die vierte Dimension in sich aufnimmt, also sich ideell verdichtet. Die Krümmung oder Biegung eines Körpers kann auf eine Drehung seiner Theile zurückgeführt werden.

Bei der primären Drehung oder Deklination einer reellen Grösse r verschwindet sukzessiv der reelle Bestandtheil und es entsteht ein imaginärer, man erhält die gedrehte Grösse als Produkt $r\,e^{\alpha i}$ oder als komplexe Summe $r\,cos\,\alpha + r\,sin\,\alpha\,.\,i$ Ein Körper von einfacher Dichtigkeit oder ein solcher, welcher nur die drei anschaulichen Dimensionen hat, bei welchem also die vierte Dimension in jedem Punkte Null ist, ist ein reeller Körper vom Volum r. Durch die Deklination α vermindert sich sein reelles Volum auf $r\,cos\,\alpha$ und es entsteht durch Verdichtung seiner Punkte ein imaginärer Körper $r\,sin\,\alpha\,.\,i$, welcher kein anschauliches Volum, wohl aber eine arithmetische Quantität $r\,sin\,\alpha$ hat. Der deklinirte Körper ist also $r\,e^{\alpha i} = r\,cos\,\alpha + r\,sin\,\alpha\,.\,i$. Was die Form des reellen Theiles $r\,cos\,\alpha$ betrifft; so bleiben bei der Deklination einer n-dimensionalen Grösse die ersten $(n-1)$ Dimensionen konstant und nur die n-te Dimension erleidet die Richtungsänderung. Nimmt man also für die Körperbildung die Ebene XY als die Nullgrenze an; so bleiben alle mit XY parallelen Querschnitte des Körpers r ungeändert, die normalen, zur Axe OZ parallelen Abstände dieser Querschnitte oder die Höhendimensionen des Körpers verkürzen sich proportional in dem Verhältnisse $cos\,\alpha$, wodurch das Volum des reellen Gliedes $r\,cos\,\alpha$ wird und hierneben entsteht ein imaginäres Volum, dessen arithmetische Quantität $r\,sin\,\alpha$ so gross ist wie der kubische Inhalt eines reellen Körpers, den man aus dem gegebenen r erhält, wenn man die Höhen in dem Verhältnisse $sin\,\alpha$ reduzirt.

Wir bezeichnen die ersten vier Hauptaxen, welche in Neutralitätsbeziehung zueinander stehen, mit OX, OY, OZ, OU, die ersten drei sind anschaulich, die vierte nicht. Handelt es sich um Linien; so wären

die in diesen Axen liegenden Linien x, y, z, u resp. die primären, sekundären, tertiären und quartären. Handelt es sich um Flächen; so wäre YX, XZ, ZY, YU die primäre, sekundäre, tertiäre und quartäre Ebene. Jetzt, wo es sich um Körper handelt, ist ZYX, YXU, XUZ, UZY der primäre, sekundäre, tertiäre und quartäre Raum, welcher, wenn r seinen Inhalt bezeichnet, resp. den Werth r, ri, rii_1, rii_1i_2 hat.

Fig. 36.



Wenn in Fig. 36 $Oabc$ einen rechtwinklig parallelepipedischen Körper r darstellt, dessen Kanten in den Axen OX, OY, ZO liegen und die Längen x, y, z haben; so ist dieser Körper als ein Raum von drei anschaulichen Dimensionen reell: weil er oberhalb der Ebene XY liegt oder durch eine aufsteigende Bewegung einer in dieser Ebene liegenden Fläche entstanden gedacht wird, ist er ein positiver Körper. Negativ reell ist ein unterhalb der Ebene XY liegender oder durch eine abwärts steigende Bewegung einer horizontalen Fläche entstanden gedachter Körper. Der positive Körper hat eine horizontale Basis, welche sich nach oben oder dem Punkte Z zukehrt, der negative Körper hat eine horizontale Basis, welche sich nach unten oder dem Punkte Z' zukehrt. Der positive Körper hat die Bedeutung einer den leeren Raum erfüllenden Grösse, der negative Körper dagegen die Bedeutung einer den erfüllten Raum entleerenden Grösse; man kann daher kurz den ersten den erfüllenden und den zweiten den entleerenden Körper nennen.

Ein reeller Körper r von beliebiger Oberflächenform ist ein Stück des reellen Gesammtraumes, er besteht aus unendlich dünnen zu XY parallelen Schnitten und ist positiv oder negativ, jenachdem er durch auf- oder absteigende Bewegung einer zu XY parallelen Fläche entsteht, die während ihrer Bewegung ihre Grenzen ändert.

Durch Deklination des beliebigen reellen Körpers r entsteht der komplexe Körper $r \cos \alpha + r \sin \alpha . i$. Denkt man sich den gesammten über der Ebene XY liegenden Raum gegen diese Ebene gleichmässig in dem Verhältnisse $\cos \alpha$ komprimirt; so nimmt dadurch auch der Körper r die dem reellen Theile $r \cos \alpha$ entsprechende Grösse, Form und Lage an. Alle horizontalen Querschnitte bleiben ungeändert, alle Höhen z reduziren sich auf $z \cos \alpha$. Für $\alpha = \frac{\pi}{2}$ wird der Körper $r \cos \alpha = 0$, derselbe reduzirt sich also auf eine in der Grundebene XY liegende Fläche, welche der Projektion des Körpers r auf diese Ebene gleichkömmt. Für $\alpha > \frac{\pi}{2}$ wird $r \cos \alpha$ negativ und für $\alpha = \pi$ erhält man $r \cos \alpha = -r$; der reelle Theil ist dann negativ und von dem Inhalte

des ursprünglichen Körpers: derselbe liegt nun unter der Ebene XY und hat die entgegengesetzte Form. Bei fortgesetztem Wachsen des Winkels α oszillirt der reelle Theil $r \cos \alpha$ fortwährend zwischen den eben bezeichneten positiven und negativen Maximalwerthen, zwischen welchen immer als Nullwerth die Projektion auf die Ebene XY durchschritten wird.

Der imaginäre Theil $r \sin \alpha . i$ ist ein Körper von drei, aber nicht von den drei ersten Dimensionen x, y, z, sondern von den beiden Dimensionen x, y, welche der Nullgrenze oder Nullfläche des reellen Körpers angehören und der vierten Dimension u des Raumes. Ein imaginärer Körper hat keine Anschaulichkeit, er ist das Resultat des Fortschrittes einer in der Ebene XY liegenden Fläche längs der vierten Dimension u, wobei die erzeugende Fläche ihre Grösse und Form ändern kann. Da sich die vierte Dimension u in den anschaulichen Punkten verhüllt; so erscheint der imaginäre Körper als eine in der Ebene XY verdichtete Grösse, welche darin entsteht, indem eine erzeugende Fläche xy sich (unter etwaiger Grössen- und Formänderung) unausgesetzt darin niederschlägt oder indem alle zur Ebene xy parallelen Querschnitte des Körpers r in die Ebene xy niedergedrückt werden. Der imaginäre Körper $r \sin \alpha . i$, welcher bei der Drehung des reellen Körpers r entsteht, liegt hiernach ganz in der Projektion des Körpers r auf die Ebene XY. Der Inhalt $r \sin \alpha$ dieses imaginären Körpers ist ebenso gross wie ein reeller Körper, welcher parallel zur Ebene xy dieselben Querschnitte hat wie der Körper r, dessen Höhen jedoch gleich $z \sin \alpha$, also gleich den im Verhältnisse $\sin \alpha$ verkleinerten Höhen des Körpers r sind.

Wenn der reelle Theil $r \cos \alpha$ sein Maximum r besitzt, hat der imaginäre Theil $r \sin \alpha . i$ sein Minimum null; wenn ersterer für $\alpha = \pi$ sein Minimum null erreicht, nimmt letzterer seinen Maximalwerth $r i$ an, und überhaupt oszillirt er zwischen dem positiven und negativen Maximum $\pm r i$.

In der komplexen Form $r \cos \alpha + r \sin \alpha . i$ erscheint der deklinirte Körper als die Summe eines reellen Körpers, welcher eine Kompression des Körpers r in der Richtung der z darstellt, und eines imaginären Körpers, welcher eine Verdichtung in der Ebene XY darstellt; diese beiden Glieder hängen durch die in der Ebene XY liegende Grundfläche des Körpers r oder durch ein erzeugendes Element desselben zusammen. Als gerichteter Körper, entsprechend dem Ausdrucke $r e^{\alpha i}$ ist dieser Körper jedoch keine komplexe Summe, sondern eine einfache gerichtete Grösse. Die Vorstellung von dieser Grösse gewinnt man, wenn man sich in dem Körper r in unendlich nahen Abständen alle Querschnitte parallel zu XY und parallel zu OZ alle Höhenlinien gezogen denkt, und indem man diese Flächen und Linien als Flächen und Linien von normaler Dichtigkeit betrachtet, alle Höhenlinien z ohne Längenänderung im Verhältnisse $\cos \alpha$, alle Flächen xy aber ohne Orts- und Formveränderung im Verhältnisse $\sin \alpha$ verdünnt. Der hierdurch entstehende Körper

im Volum des Körpers r, welcher die verdünnten Höhen $z \cos \alpha$ und die verdünnten Querschnitte $x y$ besitzt und welcher einmal als ein unendlicher Inbegriff von verdünnten Höhenlinien z die reelle Grösse $r \cos \alpha$, sodann aber als unendlicher Inbegriff von verdünnten Flächen $x y$ die imaginäre Grösse $r \sin \alpha . i$ repräsentirt, stellt den deklinirten Körper $r e^{\alpha i}$ dar.

Bei der Inklination β bleibt der Inhalt des reellen Theiles der zu inklinirenden Grösse konstant, der imaginäre Theil vermindert sich sukzessiv und es entsteht ein überimaginärer Theil, sodass die deklinirte und inklinirte Grösse den Werth

$$\begin{aligned} r e^{\alpha i} e^{\beta i_1} &= (r \cos \alpha + r \sin \alpha . i)(\cos \beta + \sin \beta . i_1) \\ &= r \cos \alpha . e^{\beta i_1} + r \sin \alpha \cos \beta . i + r \sin \alpha \sin \beta \, i i_1 \\ &= X + Y i + Z i i_1 \end{aligned}$$

annimmt. Wenngleich bei der Inklination einer deklinanten oder komplexen Grösse $r \cos \alpha + r \sin \alpha . i$ der Inhalt $r \cos \alpha$ des reellen Theiles konstant bleibt; so wälzt er sich doch in dem Gebiete der Dimensität, welchem er angehört. Bei komplexen Linien wälzt sich der reelle Theil $r \cos \alpha$ in der reellen Axe $O X$ um sich selbst; bei komplexen Flächen wälzt sich der reelle Theil oder die in der Ebene $X Y$ liegende Projektion in der Grundebene $X Y$: ebenso wälzt sich bei komplexen Körpern der reelle Körpertheil, welcher dem reellen Raume $X Y Z$ angehört, in diesem Raume.

Da diese Wälzung sowohl bei Linien, als auch bei Flächen und bei Körpern von der Art sein muss, dass die positiv reellen Grössen im positiv reellen Gebiete und die negativ reellen Grössen im negativ reellen Gebiete verbleiben; so ist die Inklination der Körper eine Wälzung um die dritte Axe $O Z$.

Durch die Inklination β erhält ein reeller Körper $Z Y X = r$ den Werth $r e^{\beta i_1} = r (\cos \beta + \sin \beta . i_1)$. Hierbei dreht sich jeder zu $X Y$ parallele Querschnitt in seiner Ebene um den Winkel β. Wenn $O X'$, $O Y'$, $O Z'$, $O U'$ die negativen Theile der vier Hauptaxen sind; so hat die erzeugende Grundfläche des inklinirten Körpers für $\beta = \frac{\pi}{2}$ die Lage $X' Y$, für $\beta = \pi$ die Lage $X' Y'$ und für $\beta = \frac{3\pi}{2}$ die Lage $X Y'$. Hiernach ist $r = + Z Y X$, $r \sqrt{\div 1} = Z X' Y$, $\div r = Z X' Y'$, $\div r \sqrt{\div 1} = Z X Y'$.

Ein imaginärer oder sekundärer Körper $Y X U$ vom Werthe $r i$ nimmt durch die Inklination β den Werth $r \cos \beta \, i + r \sin \beta . i i_1$ an. Hiervon ist der erste Theil sekundär, liegt also im Raume $Y X U$ und der zweite Theil tertiär, liegt also im Raume $X U Z$. Durch die Inklination β des sekundären Körpers, welcher als eine verdichtete Figur in der Ebene $X Y$ angeschaut wird, erleidet die nicht anschauliche Dimension u eine Drehung um den Winkel β, während die Grösse dieser Figur

bei der Wälzung um die Axe OZ ungeändert bleibt, sodass sich die Dimensionen u des imaginären Körpers in dem Verhältniss $cos\ \beta$ verkleinern und seinen Werth auf $yx\,(u\ cos\,\beta)\ i = r\ cos\,\beta\,.\,i$ reduziren, gleichzeitig aber der tertiäre Körper $yx\ (u\ sin\ \beta)\ ii_1 = r\ sin\ \beta\,.\,ii_1$ entsteht, dessen letzte Dimension $u\ sin\ \beta$ in die Richtung der fünften Hauptdimension fallen würde. Damit dieser tertiäre Körper im vierdimensionalen Raume verbleibt und darin die Axen XUZ erhält oder einen Ausdruck von der Form xuz annimmt, also eine Verdichtung in der Ebene XZ darstellt, kann man sich vorstellen, dieser tertiäre Theil entstehe dadurch, dass sich die Dimension y um den Winkel β gegen die Axe OZ hin drehe, was eine Dimension z von der Grösse $y\ sin\ \beta$, also eine verdichtete Figur in der Ebene XZ von den Dimensionen x und $z = y\ sin\ \beta$ mit der Verdichtungsdimension u ergiebt. Wenn man will, kann man auch den sekundären Theil als eine verdichtete Figur in der Ebene XY von den Dimensionen x und $y\ cos\ \beta$ mit der Verdichtungsdimension u ansehen.

Die letztere Transformation der Dimensionen hat eine allgemeinere Bedeutung. Das logische oder arithmetische Kardinalprinzip kennt keine Wiederkehr der Dimensionen, sondern eine unausgesetzte Fortbildung derselben. Im Sinne dieses Prinzipes liegen die primären, sekundären, tertiären, quartären u. s. w. Grössen, welche die Zeichen 1, i, ii_1, ii_1i_2 u. s. w. haben, für Linien in den Hauptaxen der x, y, z, u, v, w u. s. w., für Flächen in den Hauptebenen xy, yz, zu, uv, vw u. s. w. und für Körper in den Haupträumen xyz, yzu, zuv, uvw u. s. w., bei welchen sich immer neue Dimensionen zu den früheren gesellen. Das anschauliche oder geometrische Kardinalprinzip ist jedoch ein in sich wiederkehrendes System, welches, jenachdem man sich ausschliesslich im eindimensionalen oder im zweidimensionalen oder im dreidimensionalen oder im vierdimensionalen Raume bewegen will, resp. nur eine oder nur zwei oder nur drei oder nur vier Dimensionen hat, welche in sich wiederkehren. Demnach kommen anschaulich im eindimensionalen Raume für Linien nur die eine Dimensität x, im zweidimensionalen Raume für Linien die beiden Dimensitäten x, y und für Flächen die eine Dimensität xy, im dreidimensionalen Raume für Linien die drei Dimensitäten x, y, z, für Flächen die drei Dimensitäten yx, xz, zy und für Körper die eine Dimensität zyx, im vierdimensionalen Raume für Linien die vier Dimensitäten x, y, z, u, für Flächen die sechs Dimensitäten yx, xz, zu, uy, yz, xu und für Körper die vier Dimensitäten zyx, yxu, xuz, uzy in Betracht. Für Körper fällt also bei der im Geiste der Geometrie liegenden Wiederkehr der Dimensionen die fünfte Dimension v mit der ersten x und die sechste w mit der zweiten y zusammen.

Indem wir einen imaginären Körper YXU durch die Inklination partiell in den tertiären Raum XUZ führen, ist es von Wichtigkeit, den im sekundären Raume YXU verbleibenden Theil immer als eine Verdichtung in der Ebene XY innerhalb der Projektion des Körpers r auf die Ebene XY, d. h. als eine Niederschlagung der in gewissem Ver-

hältnisse verdünnten zu XY parallelen Querschnitte des Körpers r auf diese Ebene, ferner den in den tertiären Raum eintretenden Theil als eine Verdichtung in der Ebene XZ innerhalb der Projektion des Körpers r auf die Ebene XZ oder als eine Niederschlagung der zu XZ parallelen Querschnitte des Körpers auf diese Ebene zu betrachten. Der Inhalt einer solchen Verdichtung ist immer gleich dem Inhalte eines Körpers, welcher aus dem gegebenen hervorgeht, wenn der über der Projektionsebene liegende Raum in einem bestimmten Verhältnisse gegen diese Ebene komprimirt wird.

Durch die Deklination α und die Inklination β nimmt der Körper r den Werth

$$(r) = r\, e^{\alpha i}\, e^{\beta i_1} = r\, cos\, \alpha\, .\, e^{\beta i_1} + r\, sin\, \alpha\, cos\, \beta\, .\, i + r\, sin\, \alpha\, sin\, \beta\, .\, ii_1$$

an. Die rechte Seite stellt den Körper als einen triplexen, d. h. als die Aneinanderreihung eines primären, sekundären und tertiären Körpers resp. in den Haupträumen ZYX, YXU, XUZ dar. Wir nennen diese drei Theile die Projektionen des Körpers (r) resp. auf die Räume ZYX, YXU, XUZ. Die Grösse r stellt die Anschauung, nämlich das dreidimensionale Volum des ursprünglichen Körpers dar, aus welchem der gegebene Körper durch Deklination und Inklination entstanden ist. Die Grösse $r\, e^{\beta i_1}$ dagegen stellt die Anschauung desjenigen Körpers dar, welcher aus dem ursprünglich gegebenen durch die Inklination β entsteht. Sowohl r, als auch $r\, e^{\beta i_1}$ ist ein Faktor des primären Theiles des triplexen Ausdruckes: wenn man die Grössen durch den abgekürzten Richtungskoeffizienten darstellt und den Koeffizienten $e^{\beta i_1}$ im ersten Gliede unterdrückt, bleibt darin nur der Faktor r, welchen man dann nach Belieben die erste oder die zweite der eben erwähnten Bedeutungen geben kann. Jede Auffassung hat aber einen anderen Sinn, da sie einer anderen Stellung des Volums r entspricht.

Das primäre Glied des obigen triplexen Ausdruckes stellt in der Form $r\, cos\, \alpha$ den im Raume ZYX liegenden Körper dar, welcher aus dem Körper r entsteht, wenn seine Höhen z über der Ebene XY in dem Verhältniss $cos\, \alpha$ komprimirt werden, ohne die zu XY parallelen Querschnitte zu ändern. In dem vollständigen Ausdrucke hat das primäre Glied den Werth $r\, cos\, \alpha\, .\, e^{\beta i_1}$, stellt also den in dieser Weise komprimirten Körper dar, welcher die Wälzung β um die Axe OZ erlitten hat.

Das sekundäre Glied $r\, sin\, \alpha\, cos\, \beta\, .\, i$ stellt den im Raume YXU liegenden imaginären Körper vom Inhalte $r\, sin\, \alpha\, cos\, \beta$ dar. Schaut man diesen Theil als eine Projektion des ursprünglichen Körpers r an; so ist er eine Verdichtung in dessen Projektion auf die Ebene XY. Dieser Inhalt $r\, sin\, \alpha\, cos\, \beta$ ist ebenso gross wie der Inhalt eines Körpers, welcher sich aus dem gegebenen r ergiebt, wenn man dessen Höhen über der Ebene XY in dem Verhältnisse $sin\, \alpha\, cos\, \beta$ komprimirt. Wenn der Flächeninhalt der Projektion des Körpers r auf die Ebene XY gleich a ist; so würde der sekundäre Theil, wenn man sich denselben

als einen gleichmässigen Niederschlag in der Projektion a vorstellt, die Dichtigkeit $\frac{r \sin \alpha \cos \beta}{a}$ haben. In Wahrheit ist ein solcher Niederschlag nicht von gleichmässiger, sondern von einer ungleichmässigen Dichtigkeit, welche in jedem Punkte der Projektion der auf der Projektionsebene normal stehenden Dimension des Körpers proportional ist. Für viele geometrischen Betrachtungen ist es nützlich, die zu XY parallelen Querschnitte des Körpers r nicht auf die Projektion a, sondern auf denjenigen Theil seiner Oberfläche vorzustellen, welcher dieser Projektion gegenüberliegt, also das Prisma von der Höhe z und dem Querschnitte $dx\,dy$ auf das Element der Oberfläche niederzuschlagen, welches die Projektion $dx\,dy$ hat. Eine solche Kondensation eines Körpervolums auf dem einer Ebene gegenüberliegenden Theile seiner Oberfläche wollen wir den Niederschlag des Körpers auf seine Oberfläche parallel zu der auf dieser Ebene normal stehenden Niederschlagsrichtung nennen. Die Dichtigkeit eines solchen Niederschlages hat in der auf der Projektion normal stehenden Richtung in jedem Punkte der Oberfläche eine zu der betreffenden Dimension des Körpers proportionale Stärke, in normaler Richtung zu der Oberfläche variirt die Stärke des Niederschlages natürlich mit der Richtung der Normalen dieser Oberfläche. Der sekundäre Theil stellt dann den Niederschlag des Körpers $r \sin \alpha \cos \beta$, d. h. des im Verhältnisse $\sin \alpha \cos \beta$ reduzirten Körpers r in der Richtung ZO dar. Mit der Inklination β dreht sich dieser Niederschlag sammt dem ganzen Körper r um die Axe OZ.

Der tertiäre Theil $r \sin \alpha \sin \beta . i i_1$ stellt den im Raume XUZ liegenden überimaginären Körper vom Inhalte $r \sin \alpha \sin \beta$ dar. Fasst man denselben als einen Niederschlag in der Richtung YO gegen die Projektion des Körpers auf die Ebene XZ auf; so wird die Dichtigkeit des Niederschlages einen anderen Werth haben, jenachdem man den ursprünglichen oder den gewälzten Körper ins Auge fasst, weil beide eine andere Projektion b auf XZ haben. Die Dicke des Niederschlages ist immer $\frac{r \sin \alpha \sin \beta}{b}$. Für gewöhnlich fassen wir den aus der Deklination und Inklination resultirenden Körper ins Auge, verstehen also unter b die Projektion des Letzteren auf XZ.

Der triplexe, dreigliedrige Ausdruck lässt den Körper (r) als eine Summe oder Anreihung von drei neutralen dreidimensionalen Grössen erscheinen, welche immer eine zweidimensionale Grösse als gemeinschaftliche Grenze besitzen. Der primäre Theil hat mit dem sekundären den Querschnitt in der Ebene XY gemein und der sekundäre Theil hat mit dem tertiären den Querschnitt in der Ebene XZ gemein. Das dreifaktorige Produkt $r e^{\alpha i} e^{\beta i_1}$ lässt den Körper (r) nicht als ein Aggregat von Theilen, sondern als eine einfache durch Deklination und Inklination aus r erzeugte Grösse erscheinen, welche in dem Volum des resultirenden Körpers liegt und als eine Grösse betrachtet werden kann, welche, indem sie dieses

Volum ausfüllt, einmal als ein Bündel verdünnter Höhenlinien z, sodann als eine Schicht verdünnter Flächen $x\,y$ und endlich als eine Schicht verdünnter Flächen $x\,z$ angesehen werden kann.

Denken wir uns den ursprünglichen Körper vor der Deklination und Inklination in lauter elementare Kuben zerlegt, deren Kanten mit den Grundaxen $O\,X$, $O\,Y$, $O\,Z$ parallel laufen und die unendlich kleine Länge s haben, welche augenblicklich die Längeneinheit vertrete; so stellt Fig. 37 die quadratische Eintheilung irgend eines zur Ebene $X\,Y$ parallelen Querschnittes dar, dessen Flächeninhalt wir kurz mit $x\,y$ bezeichnen, indem wir unter x die Dimension parallel zu $O\,X$ und unter y die Dimension parallel zu $O\,Y$ verstehen. Durch die Deklination α werden die elementaren Würfel in rechtwinklige Parallelepipeden von der Höhe $z\,cos\,\alpha$ verwandelt. Ausserdem bildet sich als sekundärer Körper ein Niederschlag auf die Ebene $X\,Y$ als Inbegriff von quadratischen Elementen, welche in der Richtung $O\,Z$ die Dichtigkeit $z\,sin\,\alpha$ haben.

Fig. 37.

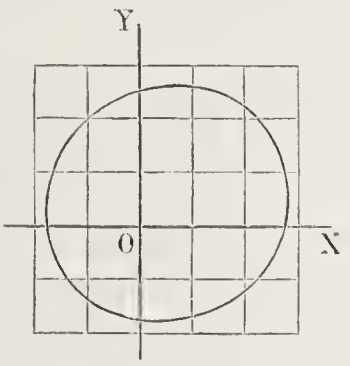
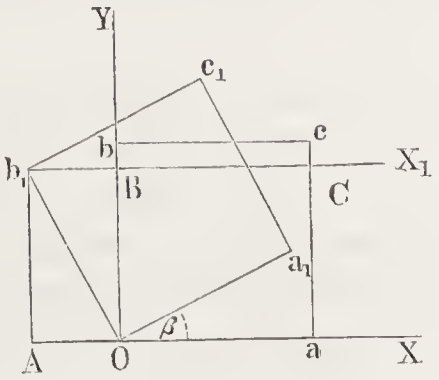


Fig. 38.



Durch die Inklination β dreht sich der Körper um die Axe $O\,Z$, die Projektion auf $X\,Y$ und jeder damit parallele Querschnitt mit seiner quadratischen Eintheilung nimmt also die in Fig. 38 gezeichnete Stellung an. Das Quadrat $O\,a\,c\,b$ geht in das Quadrat $O\,a_1\,c_1\,b_1$ über. Zieht man durch den Endpunkt b_1 zu $O\,X$ und $O\,Y$ die Parallelen $b_1\,X_1$ und $b_1\,A$; so repräsentirt $O\,B$ das Verhältniss $cos\,\beta$, in welchem sich die Dimensionen y auf $y\,cos\,\beta$ verkürzen. Diese Reduktion kann man entweder durch Reduktion aller Dimensionen y auf $y\,cos\,\beta$, also durch gleichmässige Verminderung der Breitendimensionen aller zu $X\,Y$ parallelen Querschnitte oder dadurch ausführen, dass man aus jedem Quadrate der Querschnitte $x\,y$ nur ein Stück von dem Inhalte des Rechteckes $O\,a\,C\,B$, dessen Länge $O\,a = s$ und dessen Höhe $O\,B = s\,cos\,\beta$ ist, herausnimmt: immer setzt man an die Stelle der zu $X\,Y$ parallelen Querschnitte von normaler Dichtigkeit solche, welche im Verhältnisse $cos\,\beta$ verdünnt sind und der Inbegriff aller dieser verdünnten Querschnitte bildet den Niederschlag auf die Ebene $X\,Y$, welcher den sekundären Theil des durch Deklination und Inklination entstandenen Körpers darstellt. Durch die Verkürzung der Dimensionen y rücken alle zu $X\,Z$ parallelen Schnitte näher zusammen. Ausser dieser Verdünnung der Querschnitte $x\,y$ repräsentirt die Figur 38 einen zweiten Prozess, welcher in der Erzeugung

der Projektion der Quadratseite $B b_1 = s \sin \beta$ auf die Axe $O X$ besteht, da diese Seite vor der Inklination keine solche Projektion besass. Denkt man sich daher alle Dimensionen x in dem Verhältnisse $\sin \beta$ verkürzt, wodurch alle zu YZ parallelen Querschnitte näher zusammenrücken, und betrachtet man diesen Effekt in den Veränderungen, welche durch denselben in den zu XZ parallelen Querschnitten xz vor sich gehen; so erscheint derselbe als eine Verdünnung der Querschnitte xz durch Reduktion der Dimensionen x auf $x \sin \beta$. Der Inbegriff aller dieser reduzirten oder verdünnten Querschnitte xz bildet den Niederschlag auf die Projektion XZ und stellt sich als der tertiäre Theil des durch Deklination und Inklination entstandenen Körpers dar.

Die Inklination eines in der Ebene XY liegenden sekundären Niederschlages erscheint hiernach, ganz den Prinzipien einer körperlichen Drehung gemäss, als eine Drehung, wodurch dieser Niederschlag in ein nächst höher dimensionirtes Gebiet getrieben wird und darin den tertiären Niederschlag XZ erzeugt, während sich sein Inhalt in der Ebene XY vermindert.

Lässt man den sekundären, tertiären und quartären Niederschlag statt auf die Projektionen XY, XZ, YZ auf die diesen Projektionen gegenüberliegenden Theile der Oberfläche fallen; so nimmt ein jeder in irgend einem Punkte der Oberfläche des Körpers eine Dicke an, welche, wenn sie parallel zur Projizirungsrichtung gemessen wird, der projizirten Dimension proportional ist, und wenn sie normal zur Oberfläche gemessen wird, von der Richtung der Normalen auf die Oberfläche in dem betreffenden Punkte mit abhängt. Man kann sich vorstellen, dass der Niederschlag immer aus dem Inneren des Körpers kömmt, also sich auf der Innenseite seiner Oberfläche bildet, dass aber der positive und negative Niederschlag, welcher derselben Projektionsrichtung angehört, welcher also z. B. parallel zu ZO und zu OZ gebildet ist, auf den entgegengesetzt über der Projektion XY liegenden Theilen der Oberfläche des Körpers lagere. Da mancher Punkt der Oberfläche mehreren Projektionsebenen zugleich gegenüberliegen kann; so ist es möglich, dass manches Stück der Oberfläche mehrere Niederschläge von verschiedenen Stärken empfängt.

Nach diesen Erörterungen der Deklination und der Inklination der Körper ergiebt sich die Wirkung der Reklination um den Winkel γ folgendermaassen. Durch Deklination, Inklination und Reklination wird die Grösse r

$$r e^{\alpha i} e^{\beta i_1} e^{\gamma i_2} = r \cos\alpha . e^{\beta i_1} e^{\gamma i_2} + r \sin\alpha \cos\beta . i e^{\gamma i_2} + r \sin\alpha \sin\beta . i i_1 e^{\gamma i_2}$$
$$= r \cos\alpha . e^{\beta i_1} e^{\gamma i_2} + r \sin\alpha \cos\beta . e^{\gamma i_2} i$$
$$+ r \sin\alpha \sin\beta \cos\gamma . i i_1 + r \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma . i i_1 i_2$$

und, weiter abgekürzt,

$$= r \cos\alpha + r \sin\alpha \cos\beta \,.\, i + r \sin\alpha \sin\beta \cos\gamma \,.\, i\, i_1 + r \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma \,.\, i\, i_1\, i_2$$

Das erste Glied dieses quadruplexen Ausdruckes ergiebt sich aus dem vorhin erläuterten reellen Körper $r \cos\alpha \,.\, e^{\beta\, i_1}$ arithmetisch durch Multiplikation mit dem Reklinationskoeffizienten $e^{\gamma\, i_2}$ und geometrisch durch die noch zu erläuternde Reklination γ. Dasselbe ändert hierdurch nicht seinen Inhalt, bleibt auch reell und kann nur eine Änderung der Form oder der inneren Konstitution erleiden. Das zweite Glied ergiebt sich aus dem imaginären Körper $r \sin\alpha \cos\beta \,.\, i$ arithmetisch durch Multiplikation mit dem eben genannten Koeffizienten und geometisch durch dieselbe Reklination, behält hierbei seinen Inhalt und bleibt imaginär. Das dritte und vierte Glied entsteht zusammen aus dem tertiären Körper $r \sin\alpha \sin\beta \,.\, i\, i_1$ arithmetisch durch Multiplikation mit

$$e^{\gamma\, i_2} = \cos\gamma \dotplus \sin\gamma \,.\, i_2$$

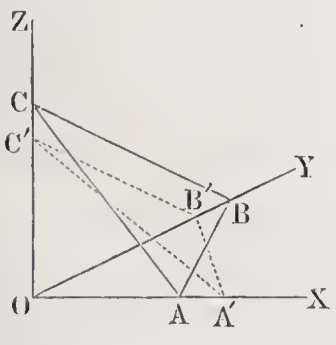
und geometrisch durch die Reklination γ, wobei der erste Theil, welcher tertiär bleibt, seinen Inhalt im Verhältnisse $\cos\gamma$ ändert, während der zweite Theil eine quartäre Grösse vom Inhalte $r \sin\alpha \sin\beta \,.\, \sin\gamma$ wird.

Um den Reklinationseffekt an Körpern festzustellen, bringen wir denselben für Linien in Erinnerung. Bei der Reklination einer triplexen Linie $(r) = a + bi + c\, i\, i_1$ bleibt die primäre und die sekundäre Ordinate a und bi nach der Anschauung ungeändert, die tertiäre Ordinate $c\, i\, i_1$ aber verkürzt sich auf $c \cos\gamma \,.\, i\, i_1$, indem sich eine im Endpunkte dieser Ordinate verhüllte quartäre Ordinate $d\, i\, i_1\, i_2$ von der nicht anschaulichen Quantität $c \sin\gamma$ bildet. Die Anschauung der reklinirten Linie im dreidimensionalen Raume, also der vom Anfangspunkte O nach dem Endpunkte der tertiären Ordinate gezogene Vektor verkürzt sich durch diesen Prozess ebenfalls auf die Länge

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 \cos^2\gamma} = \sqrt{r^2 - c^2 \sin^2\gamma}$$

und verändert seine Neigung gegen die Grundaxen, indem er sich in einer auf XY normal stehenden Ebene um O dreht.

Fig. 39.



Um die Reklination der Flächen genau zu definiren, sei in Fig. 39 ABC die Fläche $(r) = a + bi + c\, i\, i_1$, deren primäre Projektion auf XY $OAB = a$, deren sekundäre Projektion auf XZ $OAC = b$ und deren tertiäre Projektion auf YZ $OBC = c$ ist. Wenn die Reklination γ diese Fläche r in

$$(r'') = a' + b'\, i + c'\, i\, i_1 + d'\, i\, i_1\, i_2$$

verwandelt; so sei $A'B'C'$ der anschauliche Theil derselben, also die Grösse $a' + b'\, i + c'\, i\, i_1$, deren Projektionen $a' = OA'B'$, $b' = OA'C'$, $c' = OB'C'$ sind, während der nicht anschauliche Theil den Inhalt d' besitzt. Der Inhalt des anschaulichen Theiles oder die Grösse der Fläche $A'B'C'$ ist

$$r' = \sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}$$

der Inhalt der nicht anschaulichen ganzen reklinirten Fläche ist

$$r'' = \sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2 + d'^2} = \sqrt{r'^2 + d'^2}$$

Da dieser Inhalt dem Inhalte der gegebenen Fläche $r = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ gleich bleibt; so ist die anschauliche Fläche $r' = A'B'C'$ kleiner als die gegebene ABC. Die primäre Projektion $a' = OA'B'$ muss der primären $a = OAB$ und die sekundäre Projektion $b' = OA'C'$ muss der sekundären $b = OAC$ an Inhalt gleich bleiben, ausserdem muss die tertiäre Projektion $c' = c \,.\, cos\ \gamma$, die quartäre Projektion aber $d' = c\ sin\ \gamma$ werden. Setzt man also die Linien $OA = x$, $OB = y$, $OC = z$, $OA' = x'$, $OB' = y'$, $OC' = z'$; so muss $x'y' = xy = 2a$, $x'z' = xz = 2b$ und $y'z' = yz\ cos\ \gamma = 2c\ cos\ \gamma$, mithin $\frac{y'}{z'} = \frac{y}{z}$ und ausserdem

$$y' = \frac{2a}{x},\ z' = \frac{2b}{x'} \text{ und } 2c' = y'z' = \frac{4ab}{x'^2} = 2\ c\ cos\ \gamma$$

folglich

$$x' = \frac{x}{\sqrt{cos\ \gamma}} = \sqrt{\frac{2ab}{c\ cos\ \gamma}}, \quad y' = y\sqrt{cos\ \gamma} = \sqrt{\frac{2a\ c\ cos\ \gamma}{b}},$$

$$z' = z\sqrt{cos\ \gamma} = \sqrt{\frac{2\ b\ c\ cos\ \gamma}{a}}$$

sein. Hieraus geht hervor, dass durch die Reklination primäre und sekundäre Projektionen zwar an Flächeninhalt gleich bleiben, dass sie aber in der Richtung der Axe OX sich in demselben Verhältnisse ausdehnen, wie sie sich in den Richtungen der Axen OY und OZ zusammenziehen, oder umgekehrt, wenn also in diesen Projektionen alle zu OX parallelen Linien x zu mx werden, nehmen die zu OY und zu OZ parallelen Linien y und z die Längen $\frac{1}{m}y$ und $\frac{1}{m}z$ an. Die tertiäre Projektion $c = OBC$ verkleinert sich zu $c' = OB'C'$ im umgekehrten Verhältnisse des Quadrates der Verkleinerung der Dimensionen y und z, die Durchschnittslinie $B'C'$ mit der Fläche $r = A'B'C'$ bleibt der Durchschnittslinie BC mit der Fläche ABC parallel, da sich die Dimensionen y und z in gleichem Verhältnisse $\frac{1}{m}$ verkürzen. Demgemäss erleidet die triplexe Fläche ABC durch die Reklination eine Drehung um eine zu ihrer Durchschnittslinie BC mit der tertiären Ebene YZ parallele Linie und verkleinert sich hierbei, indem sie den Inhalt

$$r' = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2\ cos^2\ \gamma} = \sqrt{r^2 - c^2\ sin^2\ \gamma}$$

annimmt.

Da unbedingt $\frac{r'}{r} > \cos\gamma$, also $> \frac{c'}{c}$; so verkleinert sich die anschauliche Fläche r bei der Reklination in geringerem Verhältnisse, als die tertiäre Fläche c: in der Richtung BC erleidet sie aber die Kompression $\sqrt{\cos\gamma}$ und demnach erfährt sie normal zur Richtung BC eine geringere Kompression, als in der Richtung BC.

In der Reklination einer triplexen Fläche, welche aus einem primären, sekundären und tertiären Theile besteht, ergiebt sich zugleich die Reklination einer primären, einer sekundären und einer tertiären Fläche. Eine primäre Fläche OAB dehnt sich durch die Reklination γ nach der Richtung OX in demselben Verhältnisse $\sqrt{\cos\gamma}$ aus, in welchem sie sich nach der Richtung OY zusammenzieht. Eine sekundäre Fläche OAC dehnt sich nach der Richtung OX in demselben Verhältnisse $\sqrt{\cos\gamma}$ aus, in welchem sie sich nach der Richtung OZ zusammenzieht. Eine tertiäre Fläche OBC zieht sich sowohl nach der Richtung OY wie OZ in dem Verhältniss $\sqrt{\cos\gamma}$ zusammen. Die Form der Grenzlinie der Fläche ist hierbei ganz irrelevant: jede Dimension x parallel OX wird $\frac{x}{\sqrt{\cos\gamma}}$, jede Dimension y parallel OY wird $y\sqrt{\cos\gamma}$, jede Dimension z parallel OY wird $z\sqrt{\cos\gamma}$. Eine primäre und eine sekundäre Fläche behält bei der Reklination γ ihren Inhalt, eine tertiäre verkleinert sich in dem Verhältnisse $\cos\gamma$.

Aus diesen Ergebnissen ist die Erkenntniss der Reklination der Körper zu schöpfen. Ist der zu reklinirende Körper r triplex

$$= a + bi + cii_1$$

so muss der primäre und sekundäre Theil seinen Inhalt behalten, der tertiäre Theil den Inhalt $c\cos\gamma$ annehmen und der sich bildende quartäre Theil den Inhalt $c\sin\gamma$ erhalten.

Indem der deklinirte und inklinirte Körper

$$(r) = r\cos\alpha + r\sin\alpha\cos\beta\,.\,i + r\sin\alpha\sin\beta\,.\,ii_1$$

durch Reklination γ in den Körper

$$(r'') = r\cos\alpha + r\sin\alpha\cos\beta\,.\,i + r\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma\,.\,ii_1 + r\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\,.\,ii_1i_2$$

übergeht, hat der aus dem primären, sekundären und tertiären Theile des letzteren bestehende Körper den Werth

$$(r') = r\cos\alpha + r\sin\alpha\cos\beta\,.\,i + r\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma\,.\,ii_1$$

Betrachtet man diesen Körper als einen Körper vom Inhalte r', von der Deklination α' und der Inklination β', ohne Reklination, also von der Reklination null; sodass auch

$$(r') = r'\cos\alpha' + r'\sin\alpha'\cos\beta'\,.\,i + r'\sin\alpha'\sin\beta'\,.\,ii_1$$

ist; so muss

$$r' \cos \alpha' = r \cos \alpha$$
$$r' \sin \alpha' \cos \beta' = r \sin \alpha \cos \beta$$
$$r' \sin \alpha' \sin \beta' = r \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma$$

sein. Hieraus folgen für α', β', r' die Werthe

$$\operatorname{tang} \beta' = \operatorname{tang} \beta \cos \gamma$$
$$\operatorname{tang} \alpha' = \frac{\operatorname{tang} \alpha \cos \beta}{\cos \beta'} = \operatorname{tang} \alpha \sqrt{1 - \sin^2 \beta \sin^2 \gamma}$$
$$r' = r \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha'} = r \sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \beta \sin^2 \gamma}$$

Gleichwie die quartäre Linie und die quartäre Fläche, so hat auch der quartäre Körper, welcher in den Raum $U V W$ fallen würde, keine Dimension mit dem Raume $Z Y X$ gemein: nach Abstreifung des quartären Theiles des durch Reklination erzeugten Körpers (r'') bleibt also (wie bei den Linien und Flächen) ein aus einem primären, sekundären und tertiären Theile bestehender triplexer Körper (r') zurück, welcher als ein mit der verkleinerten Deklination α' und mit der verkleinerten Inklination β' erzeugter triplexer Körper von verkleinertem Inhalte r' erscheint. Der Letztere hat quantitativ denselben primären Theil $r' \cos \alpha' = r \cos \alpha$ und denselben sekundären Theil $r' \sin \alpha' \cos \beta' = r \sin \alpha \cos \beta$ wie der durch die Deklination α und die Inklination β entstandene Körper vom Volum r; er hat aber die Reklination null, während der andere die Reklination γ hat und ausserdem besitzt er ein kleineres Volum r'. Diese Bedingungen erfüllt ein Körper, welcher aus dem ursprünglichen Körper r dadurch entsteht, dass seine Höhendimensionen in dem Verhältnisse $\frac{\cos \alpha}{\cos \alpha'}$ verkleinert, also auf $z' = z \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha'}$ reduzirt sind: denn für diesen Körper nimmt der primäre Theil bei der Deklination α' den Inhalt $r' \cos \alpha' = r \cos \alpha$ und der sekundäre Theil bei der Deklination α' und der Inklination β' den Inhalt $r' \sin \alpha' \cos \beta' = r \sin \alpha \cos \beta$ an.

Nachdem wir durch Vorstehendes den triplexen Körper r' erläutert haben, welcher den aus dem primären, sekundären und tertiären Theile des quadruplexen Körpers r bestehenden Körper darstellt und die Analogie zu dem anschaulichen Theile einer reklinirten Linie oder Fläche bildet, kehren wir zu dem vollständigen quadruplexen Körper r zurück, dessen primärer Theil $r \cos \alpha$ und dessen sekundärer Theil $r \sin \alpha \cos \beta$ ist. Derselbe entsteht aus dem triplexen Körper

$$r e^{\alpha i} e^{\beta i_1} = r \cos \alpha + r \sin \alpha \cos \beta \,.\, i + r \sin \alpha \sin \beta \,.\, i i_1$$

folgendermaassen.

Da der primäre Theil eine dreidimensionale Grösse und der sekundäre Theil ein Niederschlag in der Ebene $X Y$ ist; so werden diese beiden Theile ihren Inhalt behalten, wenn man die Reklination als einen Prozess ansieht, welcher die Höhen z ungeändert lässt, die Dimensionen x aber in demselben Verhältnisse verkleinert, wie er die Dimensionen y vergrössert,

welcher also nach der Richtung OX eine Kontraktion $\frac{1}{n}$ und nach der Richtung OY eine Expansion n hervorbringt. Durch diesen Prozess reduzirt sich der Inhalt c des tertiären Theiles auf $\frac{1}{n}c$. Setzt man also $\frac{1}{n} = \cos\gamma$; so nimmt der tertiäre Theil c den dem Reklinationgesetze entsprechenden Betrag $c\cos\gamma$ an. Hiernach erscheint die Reklination als ein Prozess, wodurch der in der Ebene XZ liegende tertiäre Niederschlag c eine Drehung γ erleidet, welche denselben in einen höher dimensionirten Raum treibt, sodass sich der auf die Ebene XZ projizirende Theil jenes Niederschlages auf $c\cos\gamma$ reduzirt, während in dem nächst höheren Raume die Projektion $c\sin\gamma$ als ein quartärer Theil entsteht. Diesen quartären Theil kann man als einen Niederschlag in der Ebene YZ anschauen, wie wenn sich der tertiäre Niederschlag um die Axe OZ gedreht hätte.

Dieser Reklinationsprozess ist mit einer Verkleinerung des tertiären Niederschlages c im Verhältnisse $\cos\gamma$, sowie mit einer Kontraktion des sekundären und des primären Theiles in demselben Verhältnisse nach der Richtung OX und mit einer Expansion dieser Theile in dem umgekehrten Verhältnisse $\frac{1}{\cos\gamma}$ nach der Richtung OY verknüpft, wodurch die Inhalte dieser beiden Theile ungeändert bleiben, indem alle x in $x\cos\gamma$ und alle y in $\frac{y}{\cos\gamma}$ übergehen.

Diese Definition der Reklination eines triplexen, aus einem primären, sekundären und tertiären Theile bestehenden Körpers enthält zugleich die Definition der Reklination eines primären, eines sekundären und eines tertiären Körpers. Für einen primären und sekundären Körper kömmt die Reklination auf eine Kontraktion und Expansion in zwei rechtwinkligen Richtungen, also auf eine Verschiebung der Flächenelemente in den zur Ebene XY parallelen Querschnitten hinaus, wodurch sich die durch die Inklination verdrehten Quadrate $Oa_1c_1b_1$ (Fig. 38) in Parallelogramme von gleichem Inhalte verwandeln. Für einen tertiären Körper ist die Reklination eine Kontraktion in der Richtung OX. Für $\gamma = \frac{\pi}{2}$ nimmt diese Verschiebung und Kontraktion den grösstmöglichen Werth an, indem dadurch die Dimensionen x zu null, die Dimensionen y dagegen unendlich gross werden. Für $\gamma = \pi$ wechseln alle x und y das Zeichen, um für $\gamma = \frac{3\pi}{2}$ zu null, resp. zu $-\infty$ zu werden.

Für manche Zwecke ist es nützlich, die Beziehungen, in welchen die bei der Deklination, Inklination und Reklination sich bildenden Theile zu einander stehen, zu überblicken. Wenn eine Grösse, mag es eine Linie, eine Fläche, ein Körper oder eine beliebige andere Grösse

sein, sich zunächst durch Vervielfältigung aus der Einheit bildet; so stellt sie die absolute Quantität R dar. Durch Deklination α erscheint sie als duplexe Grösse

$$\begin{aligned} R e^{\alpha i} &= X + Y i \\ &= R \cos \alpha + R \sin \alpha . i \end{aligned}$$

Durch Inklination β ergiebt sich hieraus die triplexe Grösse

$$\begin{aligned} R e^{\alpha i} e^{\beta i_1} &= X_1 + Y_1 i + Z_1 i i_1 \\ &= R \cos \alpha + R \sin \alpha \cos \beta . i + R \sin \alpha \sin \beta . i i_1 \\ &= R \cos \alpha + Y \cos \beta . i + Y \sin \beta . i i_1 \end{aligned}$$

Durch Reklination γ entsteht endlich die quadruplexe Grösse

$$\begin{aligned} R e^{\alpha i} e^{\beta i_1} e^{\gamma i_2} &= X_2 + Y_2 i + Z_2 i i_1 + U_2 i i_1 i_2 \\ &= R \cos \alpha + R \sin \alpha \cos \beta . i + R \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma . i i_1 \\ &\quad + R \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma . i i_1 i_2 \\ &= R \cos \alpha + Y \cos \beta . i + Z_1 \cos \gamma . i i_1 + Z_1 \sin \gamma . i i_1 i_2 \end{aligned}$$

Nach der letzten Formel erscheint der primäre Theil als das Produkt des Kosinus der Deklination α und des Inhaltes R, der sekundäre Theil als das Produkt des Kosinus der Inklination β und des Inhaltes Y des sekundären Theiles der durch Deklination entstandenen duplexen Grösse, der tertiäre Theil als das Produkt des Kosinus der Reklination γ und des Inhaltes Z_1 des tertiären Theiles der durch Deklination und Inklination entstandenen triplexen Grösse, der quartäre Theil aber ergiebt sich aus dem tertiären durch Vertauschung des $\cos \gamma$ mit $\sin \gamma$.

Die Werthe der Projektionen X, Y; X_1, Y_1, Z_1; X_2, Y_2, Z_2, U_2 können aus den Projektionen der linearen Dimensionen der Grösse R auf mehrfache Weise gebildet werden. So kann man, wenn R einen Körper darstellt,

$X_2 = X_1 = X = z \cos \alpha . y . x$

$Y_2 = Y_1 \quad = z \sin \alpha . y \cos \beta . x$

$Z_1 \quad = z \sin \alpha . y . x \sin \beta$ aber auch $= z \sin \alpha . y \sin \beta . x$

$Z_2 \quad = z \sin \alpha . y . x \sin \beta \cos \gamma$ aber auch $= z \sin \alpha . y \sin \beta . x \cos \gamma$

$U_2 \quad = z \sin \alpha . \sin \gamma . y . x \quad$ „ „ $= z \sin \alpha . y \sin \beta . x \sin \gamma$

setzen, was verschiedenen Vorstellungen über die Entstehung dieser Projektionen entspricht. In Betreff dieser verschiedenen Entstehungsweisen und der sich daran knüpfenden Anschauungen machen wir noch folgende Bemerkungen.

Ein primärer, sekundärer, tertiärer und quartärer Körper R, Ri, Rii_1, $Rii_1 i_2$ gehört resp. den Grundräumen ZYX, YXU, XUV, UVW an. Die letzten drei sind nicht anschaulich, und wenn auch für die Axen OU, OV, OW resp. die Axen OZ, OY, OX substituirt und dadurch jene vier Körper in die dreidimensionalen Körper ZYX, YXZ, XZY, ZYX übergeführt werden; so wird durch diese Verwandlung doch

die prinzipielle Unanschaulichkeit des sekundären, tertiären und quartären Körpers nicht gehoben. Die Unanschaulichkeit dieser drei Qualitäten ist übrigens nicht von gleichem Grade. Der primäre Körper ZYX hat volle Anschaulichkeit, nämlich drei anschauliche Dimensionen x, y, z: als primärer Theil eines vier- oder mehrdimensionalen Körpers erscheint derselbe aber als ein Inbegriff verdünnter dreidimensionaler Räume, welche man wie einen Niederschlag im Grundraume ZYX betrachten kann. Der sekundäre Körper hat zwei anschauliche Dimensionen y, x, erscheint also als ein Inbegriff verdünnter Flächen yx oder, wenn dieselben in einer Ebene aufeinandergelegt werden, als ein Niederschlag auf der Grundebene YX innerhalb der Projektion des Körpers auf diese Ebene. Der tertiäre Körper hat eine anschauliche Dimension x, wir haben denselben als einen Inbegriff von verdünnten Querschnitten xz oder als einen Niederschlag auf der Projektion XZ angesehen; derselbe kann aber auch sehr rationell als ein Inbegriff verdünnter Linien x oder als ein Niederschlag auf der Grundaxe OX innerhalb der Projektion des Körpers auf diese Axe angesehen werden. Der quartäre Körper endlich hat keine anschauliche Dimension, oder vielmehr nur anschauliche Punkte: wir haben denselben als einen Inbegriff von verdünnten Querschnitten yz oder als einen Niederschlag auf der Projektion YZ aufgefasst; derselbe kann aber auch sehr rationell als ein Inbegriff verdünnter Punkte oder als ein Niederschlag im Anfangspunkte O angesehen werden.

Schliesslich notiren wir noch die Beziehungen zwischen den Inhalten der primären, sekundären, tertiären und quartären Theile des quadruplexen Körpers R.

$$\frac{X_2}{R} = \cos\alpha$$

$$\frac{Y_2}{X_2} = \operatorname{tang}\alpha\cos\beta$$

$$\frac{Z_2}{Y_2} = \operatorname{tang}\beta\cos\gamma$$

$$\frac{U_2}{Z_2} = \operatorname{tang}\gamma$$

$$\frac{X_2\,U_2}{R\,Z_2} = \operatorname{tang}\gamma\cos\alpha$$

Stellt man den Inhalt der quadruplexen oder vierdimensionalen Grösse R durch ein dreidimensionales Volum dar, dessen Projektionen auf die Ebenen XY, XZ, YZ resp. den Flächeninhalt A, B, C haben; so kann man die Inhalte des primären, sekundären, tertiären und quartären Theiles der Grösse R

$$X_2 = A z_1 \quad Y_2 = A z_2 \quad Z_2 = B y_2 \quad U_2 = C x_2$$

setzen. Alle jene Theile erscheinen danach als dreidimensionale recht-

winklige Prismen, der primäre Theil als ein solches von der Basis A und der Höhe $z_1 = \frac{X_2}{A}$, der sekundäre Theil als ein solches von der Basis A und der Höhe $z_2 = \frac{Y_2}{A}$, der tertiäre Theil als ein solches von der Basis B und der Höhe $y_2 = \frac{Z_2}{B}$, der quartäre Theil als ein solches von der Basis C und der Höhe $x_2 = \frac{U_2}{C}$.

Was die Vertauschbarkeit der Deklination, Inklination und Reklination betrifft; so leuchtet sofort ein, dass es völlig irrelevant ist, welche Stellung die Deklination gegen die anderen beiden Operationen einnimmt: nur die Umkehrung der Stellung der Inklination und Reklination bedarf einer Erläuterung. Im Vorstehenden haben wir sowohl bei der Operation mit Linien, als auch bei der mit Flächen und mit Körpern stets die Inklination vor der Reklination ausgeführt. Lässt man die Reklination vorangehen und die Inklination folgen; so hat man zu beachten, dass diese Inklination, weil die vorhergehende Reklination die reklinirte Grösse in das nicht anschauliche Bereich der vierten Dimension treibt, nicht als eine normale Wälzung erscheinen kann, sondern in der Anschauung den Charakter einer unter einem gewissen Zwange oder mit gewissen Kompressionen und Expansionen vor sich gehenden Wälzung annehmen muss. Wenn die deklinante Linie $x + y\,i$ eine Reklination γ erleidet, also gegen die Ebene XY, worin sie liegt, niedergedrückt wird, ändert sich an ihrer Anschauung Nichts: wenn dieselbe hierauf aber die Inklination β erleiden soll, durchläuft ihr Endpunkt nicht mehr einen Kreis vom Radius y in einer zu YZ parallelen Ebene, sondern eine Ellipse in dieser Ebene, deren grosse Halbaxe gleich y und deren kleine Halbaxe $y\,cos\,\gamma$ ist. Wenn man diesen Zwang, welchen die nach der Reklination ausgeführte Inklination bei Flächen und Körpern erleidet, gehörig beachtet, ergiebt sich, dass das Resultat von der Reihenfolge dieser beiden Operationen unabhängig ist.

Hieraus folgt, dass die drei Grundoperationen der Deklination, der Inklination und der Reklinationen, gemäss ihrem Wesen als neutrale Operationen nach dem Kardinalprinzipe, vertauschbar sind.

Alle vorstehenden Operationen setzen ein festes System von Hauptaxen, Hauptebenen und Haupträumen und eine Grösse R voraus, welche sich nach Grundgesetzen in diesem Systeme ändert. Diese Änderungen können wie die Änderungen beweglicher, pressbarer und verschiebbarer Systeme von Axen, Ebenen und Räumen angesehen werden, welche anfangs jene Hauptsysteme decken; die Grösse R ist ein beliebiges Stück der beweglichen Systeme und ändert sich mit denselben.

Anstatt des festen Hauptsystems und der beweglichen Grösse R kann man auch einmal eine feste Grösse R und ein bewegliches Hauptsystem denken. Dieselbe Grösse R erscheint dann, ohne irgend eine eigene Änderung als eine deklinirte, inklinirte und reklinirte Grösse, wenn man dem Koordinatensysteme Änderungen ertheilt, welche der entgegengesetzten Deklination, Inklination und Reklination $-\alpha$, $-\beta$, $-\gamma$ entsprechen. Durch die Deklination $-\alpha$ verlängern sich die elementaren Würfel in der Höhenrichtung OZ zu Parallelepipeden; der Körper erscheint also aus elementaren Parallelepipeden, welche in der Richtung OZ verdünnt sind, entstanden. Durch die Inklination $-\beta$ drehen sich diese Parallelepipeden um die Axe OZ nach der negativen Seite r, der Körper erscheint also aus gedrehten Parallelepipeden entstanden. Durch die Reklination $-\gamma$ verschieben sich die quadratischen Basen der elementaren Würfel in der Ebene XY zu Parallelogrammen, lassen also den Körper aus verschobenen oder schiefwinkligen Parallelepipeden entstanden erscheinen.

§. 13.

Die Vieldeutigkeit der anschaulichen Grössen.

Nach Vorstehendem kann jeder anschauliche Körper, mag man ihn als mit einem Systeme von erzeugenden parallelepipedischen Elementen versehen oder als aus einem Körper durch Deklination, Inklination und Reklination entstanden vorstellen, unendlich verschiedene arithmetische Werthe haben; er ist also vieldeutig. Die in §. 5 betrachtete Vieldeutigkeit entspringt daraus, dass ganze Umdrehungen, also ganze Deklinationen, ganze Inklinationen und ganze Reklinationen sich in demselben Orte decken, ferner daraus, dass wenn mehrere solche Grundoperationen konkurriren, verschiedene Werthe der Komponenten ein in demselben Orte liegendes Resultat erzeugen: eine Orts- oder Fortschrittsgrösse kann daher in unendlich verschiedener Weise eine Richtungs- oder Drehungsgrösse sein. Die Vieldeutigkeit, von welcher jetzt die Rede ist, hat eine andere Bedeutung; sie entspringt daraus, dass eine anschauliche Grösse keine vollständige ist, dass die vollständige Grösse überhaupt nicht angeschaut werden kann, da alle über der dritten liegenden Dimensionen keine Anschaulichkeit haben. Die Anschauung giebt uns daher nur die Vorstellung eines Theiles, nämlich des im dreidimensionalen Raume liegenden Theiles einer Grösse; es leuchtet aber ein, dass diesem Theile unendlich viel vollständige Grössen mit vier und mehr Dimensionen angehören können, dass also jede anschauliche Grösse eine vieldeutige ist.

Eine reelle Linie, mag sie Inklination besitzen oder nicht, also durch r oder durch $r\,e^{\beta\,i_1}$ dargestellt sein, ändert sich nicht durch Reklina-

tion; sie wird von den Linien $r\,e^{\gamma\,i_2}$ und $r\,e^{\beta\,i_1}\,e^{\gamma\,i_2}$ gedeckt. Auch eine komplexe oder deklinirte Linie $r\,e^{\alpha\,i}$ ändert sich nicht durch Reklination; sie wird durch die Linie $r\,e^{\alpha\,i}\,e^{\gamma\,i_2}$ gedeckt. Eine in der Grundebene liegende Linie kann mithin jede beliebige Reklination haben.

Eine Linie im Raume ist nach der Anschauung triplex, kann aber auch als quadruplexe Grösse gedacht werden. Wird sie als triplexe Grösse $a + b\,i + c\,i\,i_1$ gedacht; so entspricht sie der Form $r\,e^{\alpha\,i}\,e^{\beta\,i_1}$ und ihre Länge r und die beiden Exponenten α und β sind durch die Bedingungen $r\ cos\ \alpha = a$, $r\ sin\ \alpha\ cos\ \beta = b$, $r\ sin\ \alpha\ sin\ \beta = c$ bestimmt. Die Auffassung einer Linie im Raume als eine durch Deklination und Inklination entstandene triplexe Grösse involvirt stillschweigend die Voraussetzung, dass ihre Reklination nicht eine beliebige, sondern dass sie n u l l sei. Nun kann aber auch eine reklinirte Linie im dreidimensionalen Raume dieselbe Anschauung darbieten, wie jene triplexe. Diess geschieht, wenn das primäre, sekundäre und tertiäre Glied der quadruplexen Linie

$$\begin{aligned} r'\,e^{\alpha'\,i}\,e^{\beta'\,i_1}\,e^{\gamma'\,i_2} &= r'\ cos\ \alpha' + r'\ sin\ \alpha'\ cos\ \beta'\,.\,i + r'\ sin\ \alpha'\ sin\ \beta'\ cos\ \gamma'\,.\,i\,i_1 \\ &\quad + r'\ sin\ \alpha'\ sin\ \beta'\ sin\ \gamma'\,.\,i\,i_1\ i_2 \\ &= a' + b'\,i + c'\,i\,i_1 + d'\,i\,i_1\ i_2 \end{aligned}$$

mit dem betreffenden Gliede der triplexen Linie

$$\begin{aligned} r\,e^{\alpha\,i}\,e^{\beta\,i_1} &= r\ cos\ \alpha + r\ sin\ \alpha\ cos\ \beta\,.\,i + r\ sin\ \alpha\ sin\ \beta\,.\,i\,i_1 \\ &= a + b\,i + c\,i\,i_1 \end{aligned}$$

übereinstimmt, wenn man also

$$\begin{aligned} r'\ cos\ \alpha' &= r\ cos\ \alpha \quad \text{oder} \quad a' = a \\ r'\ sin\ \alpha'\ cos\ \beta' &= r\ sin\ \alpha\ cos\ \beta \quad \text{oder} \quad b' = b \\ r'\ sin\ \alpha'\ sin\ \beta'\ cos\ \gamma' &= r\ sin\ \alpha\ sin\ \beta \quad \text{oder} \quad c' = c \end{aligned}$$

hat. Diese Bedingungen werden für eine beliebige Reklination γ' erfüllt, wenn man

$$r' = r\sqrt{1 + sin^2\,\alpha\ sin^2\,\beta\ tang^2\,\gamma'} = \sqrt{a^2 + b^2 + \frac{c^2}{cos^2\,\gamma'}}$$

$$tang\ \alpha' = \frac{tang\ \alpha}{cos\ \gamma'}\sqrt{1 - cos^2\,\beta'\ sin^2\,\gamma'}$$

$$tang\ \beta' = \frac{tang\ \beta}{cos\ \gamma'}$$

annimmt.

Die vorstehenden Sätze gelten auch von F l ä c h e n. Eine reelle oder inklinirte Fläche (welche in der Grundebene $X\,Y$ liegt) kann jede beliebige Reklination haben. Auch eine deklinirte Fläche (welche in einer um die Nullgrenze $O\,X$ gedrehten Ebene liegt, also die tertiäre Projektion null hat) kann jede beliebige Reklination haben. Jede anschauliche triplexe Fläche aber kann der anschauliche Theil einer quadruplexen Fläche sein, wenn man den Flächeninhalt r', sowie die Deklination α' und die In-

klination β' dieser Fläche für eine beliebig angenommene Reklination γ' nach den vorstehenden Formeln bestimmt.

Ganz das Nämliche gilt von den Körpern. Jeder anschauliche Körper erscheint aber als ein reeller und man kann durch die Vorstellung verdünnter Linien und Flächen, sowie durch die Hinzufügung von Niederschlägen auf seiner Oberfläche oder auf seinen Projektionen, da diese Ergänzungen keine Anschaulichkeit haben, also existiren können, ohne erkennbar zu sein, diesen Körper als einen duplexen, triplexen, quadruplexen auffassen, wobei Inhalt, Deklination, Inklination und Reklination in den aus dem Früheren ersichtlichen Zusammenhang treten.

Wäre eine Linie, eine Fläche, ein Körper durch Deklination, Inklination und Reklination aus einer Grösse r von bestimmter Grösse, Stellung und Form entstanden; so hätten die Grössen r, α, β, γ anschauliche Werthe und die resultirende Grösse erschiene dann in der Form des Produktes $r\, e^{\alpha\, i}\, e^{\beta\, i_1}\, e^{\gamma\, i_2}$, in welcher sie nicht vieldeutig ist.

Die vierte und jede höhere Dimension existirt nicht in der Anschauung, es giebt sekundäre, tertiäre und quartäre, komplexe, triplexe und quadruplexe, deklinante, inklinante und reklinante Körper nicht in der anschaulichen Wirklichkeit, sondern nur in der Abstraktion: einem anschaulichen Körper kann man also solche ideellen Eigenschaften in beliebigem Maasse beilegen, man kann ihn für primär oder für sekundär oder für komplex oder für geneigt und mit einem Richtungskoeffizienten von beliebigen Exponenten begabt halten. Alles Diess ändert nur unsere Vorstellung über die mögliche Entstehungsweise dieses Körpers durch Prozesse in Dimensitätsgebieten, welche in der Anschauung nicht existiren. Als Anschauungsobjekt hat jeder Körper nur drei Dimensionen und ist als dreidimensionale Grösse reell oder primär. Die Form seiner Oberfläche ist hierbei ebenso irrelevant wie die Form der linearen Grenze einer reellen, d. h. in der Grundebene liegenden Fläche für die Reellität dieser Fläche es ist. Die vorstehend betrachtete Vieldeutigkeit der Körper hat demnach nur eine Bedeutung für die begriffliche Auffassung, nicht für die Anschauung.

§. 14.

Der körperliche Vektor und der Abschluss des vierdimensionalen Raumes.

Der Punkt beschreibt eine Linie oder ist die Grenze derselben; die Linie beschreibt eine Fläche oder ist die Grenze derselben; die Fläche beschreibt einen Körper oder ist die Grenze desselben — der Körper beschreibt eine vierdimensionale Grösse oder ist eine Grenze derselben. Die Beschreibung einer vierdimensionalen Grösse durch einen Körper

geschieht nicht durch Fortbewegung, Fortschritt oder Ortsveränderung des Körpers längs einer im dreidimensionalen Raume liegenden Linie: bei einer solchen Fortbewegung würde der Körper immer in dem dreidimensionalen Raume, welchem er angehört, verbleiben, also immer nur einen Körper beschreiben, gleichwie eine in der Ebene sich bewegende ebene Fläche immer nur eine Fläche, eine in gerader Linie fortrückende gerade Linie immer nur eine Linie beschreibt. Die Beschreibung der vierdimensionalen Grösse durch einen Körper ist vielmehr ein nicht anschaulicher Prozess, in Folge dessen jeder Punkt dieses Körpers aus dem dreidimensionalen Raume tritt, also eine in ihm selbst sich verhüllende Veränderung vollzieht, welche man als eine Verdichtung oder Verdünnung auffassen kann.

Ein Körper, da er eine Grenze des vierdimensionalen Raumes ist, schliesst mithin keinen vierdimensionalen Raum ab oder ein, lässt denselben vielmehr nach der vierten Dimension hin offen, ebenso wie die Fläche den dreidimensionalen Raum nach der dritten Dimension, die Linie den zwei- und dreidimensionalen Raum nach der zweiten und dritten Dimension, der Punkt den ein-, zwei- und dreidimensionalen Raum nach der ersten, zweiten und dritten Dimension offen lässt.

Zwei gleichartige Grössen reihen sich aneinander, indem ihre Grenzen zusammenfallen. Demzufolge verknüpfen sich Linien durch Punkte, Flächen durch Linien, Körper durch Flächen und vierdimensionale Grössen durch Körper. Bleiben wir zunächst bei der Anreihung von Körpern stehen; so geschieht dieselbe durch Flächen. Alle Körper können als Theile einunddesselben dreidimensionalen Raumes angesehen und aus würfelförmigen Elementen von gleicher Stellung zusammengesetzt werden. Geschieht Diess; so sind alle Körper reell und einförmig wie die ebenen Flächen und die geraden Linien. Alsdann erscheint jede Aneinanderreihung von Körpern durch Berührungsflächen als ein Inbegriff reeller Theile, welche einen reellen Gesammtkörper darstellen. Lässt man aber verschiedene Körper durch den Prozess der Deklination, Inklination und Reklination aus reellen Körpern hervorgehen; so entsteht aus der Zusammensetzung derselben durch gemeinschaftliche Grenzflächen eine dem Flächenpolyeder und dem Linienpolygone, allgemein aber dem arithmetischen Polynome analoge Körperform, welche man ein Polydimensional nennen könnte.

Man kann beliebig viel Linien und beliebig viel Flächen und ebenso beliebig viel Körper aneinanderreihen: allein es ist eine Minimalzahl von Linien erforderlich, um eine Fläche einzuschliessen, und eine Minimalzahl von Flächen, um einen Körper einzuschliessen, und ebenso ist eine Minimalzahl von Körpern erforderlich, um eine vierdimensionale Grösse einzuschliessen. Die als einfache Grösse dargestellte Summe einer Reihe von Gliedern ist diejenige Grösse, welche vom Anfangspunkte aus in denselben Endpunkt führt wie jene Gliederreihe, welche also, wenn sie von diesem Endpunkte in entgegengesetzter Richtung durchlaufen wird,

in den Anfangspunkt zurückkehrt oder welche mit jener Gliederreihe zusammen eine geschlossene Figur bildet. Rückkehr in den Anfangspunkt oder Schluss einer Figur hat aber nicht die Bedeutung des Wiederseins im Anfangspunkte, sondern der Wiedereinkehr in denselben nach vollständiger Umschreitung einer Grösse von nächst höherer Dimension oder unter vollständigem Einschlusse oder Abschlusse einer solchen Grösse. Daher ist eine geschlossene Punktfigur eine solche, welche zwischen den einzelnen Punkten Linienstücke abschliesst, und es sind mindestens zwei Punkte erforderlich, um eine solche Linie einzuschliessen; eine geschlossene Linienfigur ist eine solche, welche eine Fläche einschliesst, und es sind hierzu mindestens drei Linien (ein Dreieck) erforderlich; eine geschlossene Flächenfigur ist eine solche, welche einen Raum einschliesst, und es sind hierzu mindestens vier Flächen (ein Tetraeder) erforderlich. Eine geschlossene Körperfigur nun ist eine solche, welche einen vierdimensionalen Raum einschliesst, und es sind hierzu, wie wir sehen werden, mindestens fünf Körper oder dreidimensionale Grössen erforderlich.

Diejenige Grösse, welche mit einer gegebenen Gliederreihe zusammen eine geschlossene Figur bildet, ist ihre Summe oder eigentlich ihr Numerat, welches in der Geometrie den Namen Vektor trägt: zur Summirung von Körperfiguren ist hiernach der Abschluss eines vierdimensionalen Gebietes unerlässlich und man erkennt, wie wichtig und unentbehrlich die Gesetze der vierdimensionalen Grössen sind, um die den anschaulichen Gesetzen der Punkte, Linien und Flächen analogen Gesetze der Körper zu entwickeln und zu verstehen.

Wir führen noch an, dass die einfachsten Bedingungen für den Schluss einer Figur in folgenden bestehen. Von den beiden Punkten, welche eine geschlossene Punktfigur bilden, kann der eine im Nullpunkte O liegen; der zweite Punkt, welcher den Abschluss herbeiführt, kann in der Grundaxe OX liegen und schliesst dann mit dem ersten eine positiv reelle Linie ein. Von den drei Linien, welche eine geschlossene Linienfigur bilden, kann die erste primär a und die zweite sekundär bi sein; die dritte Linie ist dann eine deklinante Linie $re^{\alpha i}$, welche mit jenen beiden eine Fläche in der Grundebene XY einschliesst. Von den vier Flächen, welche eine geschlossene Flächenfigur bilden, kann die erste primär a, die zweite sekundär bi und die dritte tertiär cii_1 sein; die vierte Fläche ist dann eine deklinante und reklinante Fläche $re^{\alpha i}e^{\beta i_1}$, welche mit jenen beiden einen Körper im Grundraume XYZ einschliesst. Hiernach ist vorauszusehen, dass von den fünf Körpern, welche eine geschlossene Körperfigur bilden, der erste primär a, der zweite sekundär bi, der dritte tertiär cii_1 und der vierte quartär dii_1i_2 und dass der fünfte Körper, welcher mit jenen eine vierdimensionale Grösse einschliesst, ein deklinanter, inklinanter und reklinanter Körper $re^{\alpha i}e^{\beta i_1}e^{\gamma i_2}$ sein wird.

Ausser der absolut kleinsten Seitenzahl einer geschlossenen Figur beansprucht die kleinstmögliche Zahl von Seiten, welche paarweise einander parallel, also entgegengesetzt sind, sonst aber normal aufeinander stehen, ein Interesse. Ein Punktpaar, welches eine Linie von der Länge r einschliesst, bildet eine geschlossene Punktfigur; zwei rechtwinklige Linienpaare, welche die Quadratfläche r^2 einschliessen, bilden eine geschlossene Linienfigur; drei rechtwinklige Flächenpaare, welche den Körperkubus r^3 einschliessen, bilden eine geschlossene Flächenfigur, und es ist zu erwarten, dass vier neutrale Körperpaare, welche die vierdimensionale Grösse vom Inhalte r^4 einschliessen, eine geschlossene Körperfigur bilden werden.

Die letztere Begrenzung einer geschlossenen Figur durch neutrale Grenzen ist besonders desshalb wichtig, weil sie die einfachste Entstehungsweise der von ihr eingeschlossenen Grösse darstellt. Die beiden Punkte, welche eine gerade Linie r begrenzen, bezeichnen zugleich den ersten und den letzten Ort, welchen ein Punkt einnimmt, der diese Linie beschreibt. Die beiden gegenüberliegenden Seiten des Quadrates r^2 bezeichnen den ersten und den letzten Ort einer Linie, welche im normalen Fortschritte zu sich selbst eine Fläche beschreibt. Die beiden gegenüberliegenden Seitenflächen eines Würfels r^3 bezeichnen den ersten und den letzten Ort einer Fläche, welche in normalem Fortschritt zu sich einen Körper beschreibt. Ausserdem kann die eingeschlossene Grösse durch jede einem solchen Paare angehörige Grenze beschrieben werden, also der Würfel $OXYZ$ so gut durch die Quadratfläche XOY, wie durch die Quadratfläche XOZ, wie durch die Quadratfläche YOZ.

Die Grenzen der Flächen sind Linien: aber je nach dem Dimensitätsgebiete, welchem eine Fläche angehört, gehören auch ihre linearen Grenzen bestimmten Dimensitätsgebieten an. Eine primäre, in der Grundebene XY liegende Fläche hat komplexe oder deklinante Linien zu Grenzen, nämlich Linien, welche dem Gebiete der primären und sekundären Linien angehören; eine sekundäre, in der Ebene XZ liegende Fläche hat Linien zu Grenzen, welche dem Gebiete der primären und tertiären Axe angehören; eine komplexe, aus einem primären und sekundären Theile bestehende, im Raume XYZ liegende Fläche hat triplexe Linien zu Grenzen; eine aus einem sekundären und tertiären Theile bestehende, in den vierdimensionalen Raum eingreifende Fläche hat Linien zu Grenzen, welche aus sekundären, tertiären und quartären Gliedern bestehen.

Die Grenzen der Körper sind Flächen; allein unter allgemeinerem Gesichtspunkte lautet dieser Satz: die Grenzen der dreidimensionalen Grössen sind zweidimensionale Grössen und das Dimensitätsgebiet, welchem diese Grenzen angehören, hängt von dem Dimensitätsgebiete ab, in welchem die Ersteren liegen. Eine dreidimensionale Grösse kann dem anschaulichen Raume ZYX an-

gehören, d. h. sie kann eine primäre sein; sie kann aber auch einem nicht anschaulichen Gebiete z. B. dem Gebiete YXU der sekundären Raumgrössen, oder dem Gebiete XUV der tertiären Raumgrössen, oder dem Gebiete UVW der quartären Raumgrössen, oder dem Gebiete $ZYXU$ der komplexen (aus primären und sekundären Theilen bestehenden) nämlich der deklinanten Grössen, oder dem Gebiete $ZYXUV$ der triplexen (aus primären, sekundären und tertiären Theilen bestehenden) nämlich der deklinanten und inklinanten Grössen, oder dem Gebiete $ZYXUVW$ der quadruplexen (aus primären, sekundären, tertiären und quartären Theilen bestehenden) nämlich der deklinanten, inklinanten und reklinanten Grössen, oder auch irgend einem anderen, z. B. dem Gebiete $YXUV$ der aus sekundären und tertiären Theilen bestehenden Grössen angehören. In jedem dieser Fälle gehören auch die zweidimensionalen Grenzen dieser Grössen bestimmten, aber verschiedenen Dimensitätsgebieten an. Die Grenzen eines primären Körpers sind immer Flächen, welche dem anschaulichen dreidimensionalen Raume angehören, also anschauliche Flächen. Die Grenzen eines sekundären Körpers YXU können jedoch, wenn sie anschaulich sind, nur Flächen aus der Ebene YX sein; ein solcher Körper kann aber auch nichtanschauliche zweidimensionale Grenzen haben, deren eine Dimension der Ebene XY angehört, während die andere Dimension in der vierten Axe OU liegt. Die Grenzen eines tertiären Körpers XUV können höchstens e i n e anschauliche Dimension x haben, während die andere Dimension dem Gebiete UV angehört: möglicherweise gehören aber beide Dimensionen der Grenze dem Gebiete UV an. Die Grenzen eines quartären Körpers UVW können keine anschauliche Dimension haben. Indem man die Entwicklung nach der vierten und jeder höheren Dimension wie einen Verdichtungsprozess ansieht oder auch, indem man die nicht anschaulichen Axen mit anschaulichen vertauscht, stellt man zwar aus den nicht anschaulichen Linien, Flächen und Körpern anschauliche Grössen her: allein die Letzteren sind doch immer nur Repräsentanten des quantitativen Inhaltes der Ersteren, hinsichtlich der Qualität sind sie sämmtlich primär, in dieser Hinsicht also nicht derselben gleich.

Wenn es sich um die Gemeinschaft von Grenzen handelt; so können hiernach zwei primäre Körper jede dem Raume ZYX angehörige Fläche miteinander gemein haben. Ein primärer und ein sekundärer Körper können nur eine in der Grundebene XY liegende gemeinschaftliche Grenzfläche haben. Ein tertiärer Körper kann mit einem sekundären Körper die nicht anschauliche Fläche XU (welche sich eventuell in eine anschauliche Fläche XZ verwandelt), mit einem primären Körper aber nur die anschauliche Linie X gemein haben. Ein quartärer Körper kann mit einem tertiären Körper die nicht anschauliche Fläche UV (welche sich eventuell in eine anschauliche Fläche ZY verwandelt), mit dem sekundären Körper eine nicht anschauliche Linie U gemein haben.

Das Wesen eines primären, sekundären, tertiären und quartären

Körpers erlangt nur durch das Wesen des vierdimensionalen Gebietes sein Verständniss. Jede Dimensitätsstufe der dreidimensionalen Körper bildet eine Grenze des vierdimensionalen Gebietes oder ein Element, aus welchem eine vierdimensionale Grösse durch Beschreibung entsteht. Dreidimensionale Grössen sind es, welche einen vierdimensionalen Raum abschliessen, und ein solcher kann auf verschiedene Weise durch eine dreidimensionale Grösse beschrieben werden. So ist der anschauliche Kubus $ZYX = r^3$ die Grenze einer vierdimensionalen Grösse $ZYXU$ von der Quantität r^4, welche entsteht, indem dieser Kubus eine vierte Dimension $OU = r$ beschreibt, indem also jeder seiner Punkte in der Richtung der vierten Dimension den Weg r durchläuft. Da dieser Weg keine Anschaulichkeit hat; so unterscheidet sich die erste und die letzte Lage des beschreibenden Körpers XYZ nicht voneinander und die Anschauung der vierdimensionalen Grösse r^4 ist dieselbe wie die des dreidimensionalen Kubus r^3; sie erscheint als ein verdichteter Raum r^3. Die Grösse $ZYXU$ kann aber auch dadurch erzeugt werden, dass der sekundäre Körper YXU, welcher als eine verdichtete Fläche $YX = r^3$ erscheint, längs der anschaulichen Dimension $OZ = r$ fortschreitet, in welchem Falle sich die erste und letzte Lage der beschreibenden Grenze YXU anschaulich durch die Örter zweier gegenüberliegenden Seitenflächen des Würfels r^3 unterscheiden. Ausserdem kann die Grösse $ZYXU$ durch den tertiären Körper XUZ, welcher als ein Inbegriff verdichteter Linien OX in der Ebene XZ angeschaut werden kann, vermöge des Fortschreitens längs OY erzeugt werden. Endlich kann diese Erzeugung durch den quartären Körper UZY geschehen, welcher als ein Inbegriff verdichteter Punkte in der Ebene YZ erscheint, indem diese Ebene längs OX fortrückt.

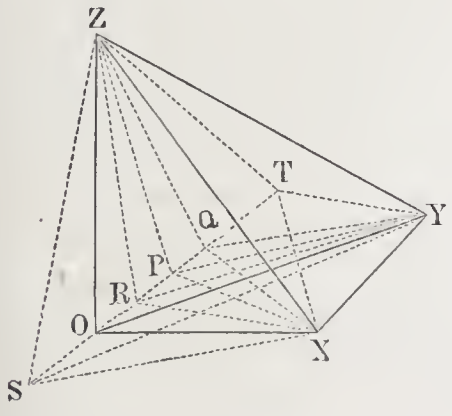
Bei jeder der letzteren Erzeugungsweisen handelt es sich immer um einen ersten und einen letzten Ort des erzeugenden Körpers. Diese beiden Örter begrenzen immer eine Dimension des vierdimensionalen Raumes; es sind also vier Paare von Grenzkörpern erforderlich, um alle vier Dimensionen des vierdimensionalen Gebietes zu begrenzen oder ein Stück dieses Gebietes vollständig abzugrenzen. Zwei primäre Körper ZYX begrenzen die Dimension OU, zwei sekundäre Körper YXU die Dimension OZ, zwei tertiäre Körper XUZ die Dimension OY und zwei quartäre Körper UZY die Dimension OX und es sind vier dreidimensionale zueinander neutrale Körperpaare erforderlich, um ein vierdimensionales Gebiet abzuschliessen oder um eine geschlossene Körperfigur zu bilden. Von diesen Grenzpaaren erscheinen übrigens nur das zweite, dritte und vierte Paar in zwei anschaulich verschiedenen Örtern, während das erste Paar durch einunddenselben anschaulichen Raum gedeckt wird.

Die erzeugende Grösse schreitet bei dem vorstehenden Entstehungsprocesse längs einer Dimension fort, welche zu jeder in dieser Grösse liegenden Dimension neutral ist oder auf dieser Grösse normal steht.

Hiernach beschreibt jeder Punkt der erzeugenden Grösse eine auf ihr selbst normal stehende Linie. Die Seite der erzeugenden Grösse des einen Prozesses erscheint in einem anderen dieser Prozesse entweder als Seite oder als Weg der erzeugenden Grösse und jeder Prozess kann den anderen ersetzen. Diese Beziehungen setzen offenbar voraus, dass die beschreibende Grösse während des Fortschrittes stets ihrem Anfangswerthe kongruent bleibt. Änderte sie allmählich ihre Grösse oder Form, würden also während des Fortschrittes bald Stücke abgeschnitten, bald angesetzt; so können von ihren Kanten keine Grössen beschrieben werden, welche zu ihr selbst normal oder neutral sind, vielmehr wird jetzt eine Grösse mit Seiten entstehen, welche zueinander Deklination, Inklination, Reklination haben können.

Wird der Körper, welcher eine vierdimensionale Grösse $ZYXU$ beschreibt, beim ersten Prozesse, wo ein anschaulicher Körper die nicht anschauliche Dimension OU durchläuft, konstant erhalten; so entsteht nach dem ersten der vorhin bezeichneten vier Prozesse eine Grösse, welche sich anschaulich von dem erzeugenden Körper nicht unterscheidet, welche Figur derselbe auch haben möge. Wenn man aber bei dem zweiten, dritten und vierten Prozesse einen erzeugenden Körper von variabeler Grösse voraussetzt und die Variabilität so nimmt, dass der Inhalt des erzeugenden Körpers am Ende seines Weges den Nullwerth annimmt; so verschwindet in der erzeugten Grösse diejenige Seite, welche der ersten Lage des erzeugenden Körpers gegenübersteht. Indem z. B. bei dem zweiten Prozesse, wo eine verdichtete Fläche XY längs OZ fortrückt, die Grösse dieser Fläche allmählich auf null herabsinkt, entsteht ein in der Richtung OZ sich verjüngender, also in einer Linie oder in einem Punkte auslaufender Körper. Wenn etwas Ähnliches auch für den dritten und vierten Prozess eintritt, erhält man eine vierdimensionale Grösse, welche nicht mehr durch vier Körperpaare oder durch acht Körper, sondern nur durch fünf Körper begrenzt erscheint. Die Anschauung dieser Grösse ist ein Tetraeder $OXYZ$ (Fig. 40), von welchem die drei Seiten OXY, OXZ, OYZ in den drei Hauptebenen liegen und die vierte Seite XYZ eine gegen alle diese Ebenen geneigte Fläche ist. Der anschauliche Raum dieses Tetraeders repräsentirt den erzeugenden anschaulichen Körper $OXYZ$ für den ersten Prozess der Beschreibung längs der nicht anschaulichen Axe OU sowohl in der ersten, als auch in der letzten Stellung.

Fig. 40.



Bei dem zweiten Prozesse reduzirt sich allmählich die verdichtete Fläche OXY auf den Punkt Z, bei dem dritten Prozesse die verdichtete Fläche OXZ auf den Punkt Y und bei dem vierten Prozesse die verdichtete Fläche OYZ auf den Punkt X. In jedem dieser letzten drei

Prozesse beschreiben die beiden Katheten der erzeugenden verdichteten Dreicksfläche eine der übrigen erzeugenden Flächen, die Hypotenuse aber beschreibt die schräge Fläche XYZ des Tetraeders. Diese schräge Fläche erscheint daher in dreifacher Rolle, nämlich als ein Niederschlag aus der Richtung OZ, aus der Richtung OY und aus der Richtung OX. In dieser Weise nimmt die schräge Fläche des gedachten Tetraeders die letzte Lage der erzeugenden Grössen aus den letzten drei Prozessen auf. Für den ersten Prozess repräsentirt diese Fläche die erzeugende Grenze in der Anfangslage, während dieser Körper nach der Durchschreitung der Dimension OU einmal als eine hinschreitende und einmal als eine herschreitende oder einmal als ein in der Ecke O beginnender und einmal als ein in der schrägen Tetraederfläche beginnender Raum erscheinen muss. Der vierdimensionale Raum kann durch jede ihrer eben betrachteten Grenzen, also auch durch die verdichtete Fläche XYZ beschrieben werden: bei dieser Beschreibung denken wir uns die Fläche XYZ längs ihrer Normalen DO fortschreitend und dabei in dem Maasse sich verkleinernd, wie der Raum zwischen den drei Hauptebenen es verlangt, bis sie im Punkte O den Nullwerth annimmt. Bei diesem Prozesse beschreibt die Fläche XYZ als anschauliche Fläche zugleich den anschaulichen Raum des erzeugenden Körpers $OXYZ$, welcher auch im umgekehrten Prozesse von der Spitze O aus durch allmähliche Vergrösserung der beschreibenden Fläche dargestellt wird. Hieraus ist klar, dass der in Tetraederform angeschaute vierdimensionale Raum halb so viel Grenzkörper hat, als der in Würfel- oder Parallelepipedenform angeschaute, plus einen (nämlich $\frac{1}{2} \cdot 8 + 1 = 5$), da sich die Hälfte der Grenzen des würfelförmigen Raumes auf die eine verdichtete schräge Fläche des Tetraederraumes reduzirt.

Wenn es nicht darauf ankömmt, möglichst einfache Effekte zu erzielen, können Flächen, Körper und vierdimensionale Grössen auch durch schrägen Fortschritt einer Grenze beschrieben werden. Hierdurch gelangt man zunächst zur Vorstellung einer vierdimensionalen Grösse in der anschaulichen Gestalt eines schiefwinkligen Parallelepipedums mit Niederschlägen auf seinen parallelogrammatischen Seitenflächen. Sodann aber bietet sich die vierdimensionale Grösse in der Form eines unregelmässigen Tetraeders mit Niederschlägen auf seinen vier dreieckigen Seitenflächen dar. Jeder dieser Niederschläge muss von der Art sein, dass er bei dem Fortschritte und der sukzessiven Verkleinerung seiner Fläche die vierdimensionale Grösse vollständig beschreibt, also auch ihren quantitativen Inhalt hervorbringt.

Selbstredend ist die vierdimensionale Grösse, welche von einem Systeme dreidimensionaler Grössen eingeschlossen wird, qualitativ und quantitativ etwas ganz Anderes, als dieses letztere System und jedes seiner Glieder. So hat die vierdimensionale Grösse, welche in einem dreidimensionalen rechtwinkligen Parallelepipedum von den Kanten a, b, c

angeschaut wird, die Quantität $abcd$, wenn d die Länge der vierten Dimension ist. Damit diese Grösse durch den Niederschlag auf $XY = ab$ beschrieben werden kann, muss dieser Niederschlag die Dichtigkeit d haben, damit sie durch den Niederschlag auf $XZ = ac$ beschrieben werden kann, muss derselbe ebenfalls die Dichtigkeit d haben, und Dasselbe gilt von dem Niederschlage auf $YZ = bc$.

Die acht dreidimensionalen Grenzen der primären vierdimensionalen Grösse $abcd$ sind also

das primäre Körperpaar $\pm abc$,
das sekundäre Körperpaar $\pm abdi$,
das tertiäre Körperpaar $\pm acdii_1$ und
das quartäre Körperpaar $\pm bcdii_1i_2$,

welche lauter verschiedene Inhalte haben. Umgekehrt, leuchtet ein, dass wenn diese Grenzpaare in Form eines dreidimensionalen Parallelepipedums abc und der drei neutralen Niederschläge von $abdi$, $acdii_1$ und $bcdii_1i_2$ gegeben sind, keine dieser Grössen für sich allein den Werth der davon eingeschlossenen vierdimensionalen Grösse bestimmt.

Durch Generalisirung der Operationen ergeben sich aus den vorhin eingenommenen beiden Gesichtspunkten für alle Dimensitätsgebiete zwei Grössenformen von folgender Beschaffenheit. Die erste Form ist von lauter neutralen Grenzfiguren, die zweite von der kleinstmöglichen Zahl von Grenzfiguren eingeschlossen. Nach dem ersten Prinzipe entsteht aus einer Grösse von n Dimensionen die Grösse von $n + 1$ Dimensionen, indem die erstere Grösse als Grenzfigur der letzteren parallel zu sich selbst und ohne Inhaltsänderung längs der $(n + 1)$-ten Dimension um eine gegebene Entfernung fortschreitet. So entsteht aus dem undimensionalen Punkte A durch Fortschritt um die Länge a in der primären Richtung OX die eindimensionale Linie $AB = a$, alsdann aus dieser Linie durch Fortschritt um die Breite b in der sekundären Richtung OY das zweidimensionale Rechteck $ABCD = ab$, sodann aus diesem Rechtecke durch Fortschritt um die Höhe c in der tertiären Richtung OZ das dreidimensionale Parallelepipedum $ABCDEFGH = abc$, hierauf aus diesem Parallelepipedum durch Fortschritt um die vierte Dimension d in der quartären Richtung OU, die vierdimensionale Grösse $abcd$, deren Anschauung von jenem Parallelepipedum verhüllt wird, sodann aus dieser Grösse durch Fortschritt um die fünfte Dimension e in der quintären Richtung OV die fünfdimensionale Grösse $abcde$ u. s. w. Die auf diese Weise entstehenden Grössen werden von einer bestimmten Anzahl Punkte, Linien, rechteckiger Flächen, parallelepipedischer Körper, rechtwinkliger vierdimensionalen Grössen, rechtwinkliger fünfdimensionalen Grössen u. s. w. begrenzt oder eingeschlossen und zwar ist die Anzahl dieser un-, ein-, zwei-, drei-, vier-, fünfdimensionalen Grenzfiguren für die gedachten Grössen aus nachstehender Tabelle ersichtlich.

Grösse	Grenzpunkte	Grenzlinien	Grenzflächen	Grenzkörper	Vierdimensionale Grenzen	Fünfdimensionale Grenzen
Punkt	1					
Linie	2	1				
Rechteck	4	4	1			
Parallelepipedum . . .	8	12	6	1		
Vierdimensionale Grösse	16	32	24	8	1	
Fünfdimensionale Grösse	32	80	80	40	10	1
n-dimensionale Grösse .	2^n	$n \cdot 2^{n-1}$	$\frac{n(n-1)}{1.2} \cdot 2^{n-2}$	$\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} \cdot 2^{n-3}$	etc.	etc.

Die Anzahl der Eckpunkte der n-dimensionalen Grösse ist gleich 2^n, die Länge ihrer Kanten ist $2^{n-1}(a + b + c + \cdots)$, der Flächeninhalt ihrer Ober- oder Grenzfläche ist $2^{n-2}(ab + ac + bc + \cdots)$, der kubische Inhalt ihrer Grenzkörper oder ihre körperliche Grenze ist

$$2^{n-3}(abc + abd + bcd + \cdots)$$

der Inhalt ihrer vierdimensionalen Grenze ist

$$2^{n-4}(abcd + abce + bcdc + \cdots)$$

endlich ihr n-dimensionaler Inhalt $abcde\ldots$

Nach dem zweiten Prinzipe entsteht aus einer Grösse von n Dimensionen die Grösse von $n + 1$ Dimensionen, indem die erstere Grösse als Grenzfigur der letzteren parallel zu sich selbst, jedoch unter sukzessiver gleichmässiger Verkleinerung ihrer Dimensionen bis zum endlichen Verschwinden längs der $(n + 1)$-ten Dimension um eine gegebene Entfernung fortschreitet. So entsteht, wenn die erzeugende Figur erst längs der Axe OX um a, dann längs der Axe OY um b, dann längs der Axe OZ um c, dann längs der Axe OU um d u. s. w. fortrückt, aus dem Punkte die Linie a, aus der Linie die rechtwinklige Dreiecksfläche $\frac{1}{2}ab$, aus dieser Fläche das rechtwinklige Tetraeder $\frac{1}{6}abc$, aus diesem Körper die vierdimensionale Grösse $\frac{1}{24}abcd$, welche anschaulich von einem Tetraeder verhüllt wird, aus dieser Grösse die fünfdimensionale Grösse $\frac{1}{120}abcde$ und endlich die n-dimensionale Grösse vom Inhalte $\frac{abcde\ldots}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n}$. Die Grenzfiguren dieser Grössen sind Punkte,

Linien, Dreiecksflächen, Tetraederkörper u. s. w., deren Anzahl aus folgender Übersicht hervorgeht.

Grösse	Grenzpunkte	Grenzlinien	Grenzflächen	Grenzkörper	Vierdimensionale Grenzen	Fünfdimensionale Grenzen
Punkt	1					
Linie	2	1				
Dreieck	3	3	1			
Tetraeder	4	6	4	1		
Vierdimensionale Grösse	5	10	10	5	1	
Fünfdimensionale Grösse	6	15	20	15	6	1
n-dimensionale Grösse .	n	$\frac{n(n-1)}{1.2}$	$\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$	etc.	etc.	etc.

Die zuerst erwähnten rechtwinkligen Grössen liefern eine interessante Illustration des Wesens der höheren algebraischen Gleichungen. Denn wenn die Gleichung n-ten Grades mit abwechselnden Zeichen

$$x^n - A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} - A_3 x^{n-3} + \cdots (-1)^n A_n = 0$$

oder

$$(x - a_1)(x - a_2)(x - a_3) \cdots (x - a_n) = 0$$

lauter positive reelle Wurzeln $a_1, a_2, a_3 \ldots a_n$ hat, und man entwirft über den Linien $a_1, a_2, a_3 \ldots a_n$ die n-dimensionale rechtwinklige Grösse; so repräsentirt der erste Koeffizient A_1 den 2^{n-1}ten Theil der Länge aller Kanten, der zweite Koeffizient A_2 den 2^{n-2}ten Theil der gesammten Oberfläche, der dritte Koeffizient A_3 den 2^{n-3}ten Theil der körperlichen Grenze, der vierte Koeffizient A_4 den 2^{n-4}ten Theil der vierdimensionalen Grenze u. s. w., endlich der letzte oder n-te Koeffizient A_n den n-dimensionalen Inhalt der ganzen Grösse.

Ist man also im Stande, eine n-dimensionale rechtwinklige Grösse zu konstruiren, deren Kantenlänge $2^{n-1} A_1$, deren Oberfläche $2^{n-2} A_2$, deren körperliche Grenze $2^{n-3} A_3$, deren vierdimensionale Grenze $2^{n-4} A_4$ u. s. w. und deren n-dimensionaler Inhalt A_n ist; so hat man die gegebene Gleichung aufgelös't. Dem in der Gleichung n-ten Grades liegenden Probleme steht also die geometrische Aufgabe gegenüber, einen n-dimensionalen Körper aus den gegebenen Inhalten seiner ein-, zwei-, drei- ... n-dimensionalen Be-

grenzung zu konstruiren. Die in dieser Konstruktion liegende Auflösung ist eine vollständige, indem die n aufeinander normal stehenden Kanten $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$ sämmtliche n Wurzeln der Gleichung darstellen. Ausserdem veranschaulicht die zur Auflösung dienende n-dimensionale Grösse alle übrigen in der gegebenen Gleichung liegenden Beziehungen zwischen je zwei, je drei, ... je $(n - 1)$ Wurzeln. Denn fasst man von den n Wurzeln r beliebige $a_1, a_2, \ldots a_r$ ins Auge; so konstituiren dieselben die r-dimensionale Grösse mit den r Kanten $a_1, a_2, \ldots a_r$, welche in der obigen n-dimensionalen Grösse ebenfalls enthalten ist. Bezeichnet nun B_1 den 2^{r-1}ten Theil der Kantenlänge der letzteren r-dimensionalen Grösse, B_2 den 2^{r-2}ten Theil ihrer Oberfläche, B_3 den 2^{r-3}ten Theil ihrer körperlichen Grenze u. s. w., endlich B_r ihren r-dimensionalen Inhalt $a_1 a_2 \ldots a_r$; so repräsentirt diese Grösse die Gleichung

$$x^r - B_1 x^{r-1} + B_2 x^{r-2} - B_3 x^{r-3} + \cdots (-1)^r B_r$$
$$= (x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_r) = 0$$

welche sich aus der gegebenen Gleichung durch Division mit

$$(x - a_{r+1})(x - a_{r+2})\ldots(x - a_n)$$

ergiebt.

Die Gleichung n-ten Grades ist zugleich der Repräsentant eines geometrischen Satzes, welcher sich so ausdrücken lässt. Jede rechtwinklige n-dimensionale Grösse kann auf n verschiedene Weisen aus n abwechselnd positiv und negativ genommenen rechtwinkligen n-dimensionalen Grössen zusammengesetzt werden. Ist x irgend eine beliebige der n Kanten der gegebenen Grösse; so ist von den n Grössen, aus welchen sie zusammengesetzt werden kann, die erste die n-dimensionale Grösse x^n mit lauter gleich langen Kanten x; die zweite ist die n-dimensionale Grösse $A_1 x^{n-1}$, deren eine Kante A_1 der 2^{n-1} Theil der gesammten Kantenlänge der gegebenen Grösse ist, deren übrige Kanten aber gleich x sind; die dritte ist die n-dimensionale Grösse $A_2 x^{n-2}$, deren Grundfläche A_2 der 2^{n-2}te Theil der Oberfläche der gegebenen Grösse ist, deren übrige Kanten aber gleich x sind; die vierte ist die n-dimensionale Grösse $A_3 x^{n-3}$, deren körperliche Basis A_3 der 2^{n-3}te Theil der körperlichen Grenze der gegebenen Grösse ist, deren übrige Kanten aber gleich x sind, u. s. w. So drückt z. B. die kubische Gleichung $x^3 - A_1 x^2 + A_2 x - A_3 = 0$ den Satz aus, dass jedes Parallelepipedum vom Inhalte A_3 und mit den drei Kanten x, y, z aus dem Kubus x^3, ferner dem negativ genommenen Parallelepipedum $A_1 x^2$, dessen eine Kante A_1 der 4-te Theil der Kantenlänge des gegebenen ist, während die anderen beiden Seiten gleich x sind, endlich dem positiv genommenen Parallelepipedum $A_2 x$, dessen Grundfläche A_2 die Hälfte der Oberfläche des gegebenen und dessen dritte Kante gleich x ist, zusammengesetzt werden kann.

Befinden sich unter den reellen Wurzeln der gegebenen Gleichung auch negative; so können mehrere der Koeffizienten A_1, $A_2 \ldots A_n$ negativ werden. In diesem Falle werden mehrere der Kanten a, b, $c \ldots$ oder der Flächen ab, ac, $bc \ldots$ oder der Körper abc, abd, $bcd \ldots$ u. s. w. negativ. Unter Berücksichtigung der positiven und negativen Zeichen dieser Linien, Flächen, Körper u. s. w. behalten die erörterten Gesetze volle Gültigkeit.

Imaginäre Wurzeln bedingen schiefwinklige Kanten, Flächen, Körper u. s. w., deren Richtungen und Inhalte näher zu bestimmen, wir dem Leser überlassen.

In einer geschlossenen Figur giebt es keine offene oder freie Grenze, je zwei benachbarte Seiten dieser Figur begegnen sich in gemeinschaftlichen, sich deckenden Grenzen. Irgend eine Seite dieser Figur schliesst den aus den übrigen Seiten bestehenden Zug; irgend eine Seite, in entgegengesetzter Richtung genommen, bildet den Vektor des letzteren Zuges; der Vektor eines Zuges ist mithin diejenige Grösse, welche alle freien Grenzen dieses Zuges als eigene Grenzen besitzt. Hiernach ist der Vektor einer Reihe von Flächen diejenige Fläche, welche durch alle freien Grenzen dieser Reihe vollständig begrenzt wird und ebenso ist der kubische Vektor einer Reihe von Körpern derjenige Körper, welcher durch sämmtliche freien Grenzflächen jener Körperreihe begrenzt wird.

Der Vektor einer Reihe oder eines Aggregates von Linien erscheint immer als eine anschauliche gerade Linie von der Form $re^{\phi i}\, e^{\psi i_1}\, e^{\chi i_2}$. Der Vektor eines Aggregates von Flächen erscheint jedoch nicht immer als eine ebene Fläche: so schliesst sich der von einer reellen und von einer deklinanten und inklinanten Fläche frei gelassene Raum durchaus nicht mittelst einer ebenen Fläche ab, sondern erfordert eine gebrochene Vektorfläche, welche mindestens aus zwei ebenen Flächen besteht, und die Reduktion des arithmetischen Ausdruckes dieses Vektors auf die einfache Form $re^{\phi i}\, e^{\psi i_1}$, welcher natürlich auch eine ebene geometrische Fläche entspricht, setzt eine Transformation voraus, deren Resultat nicht der von den freien Grenzen jener beiden Flächen eingeschlossene, sondern ein demselben äquivalenter Flächenvektor ist. Ganz dasselbe gilt von dem kubischen Vektor eines Aggregates von Körpern. Man kann hiernach den auf die einfachste Form reduzirten Vektor von dem durch die freien Grenzen des Aggregates zugegebenen unmittelbaren Vektor unterscheiden. Zuweilen geht der letztere durch Aufhebung positiver und negativer Glieder in den ersteren über, z. B. bei der Addition einer reellen rechteckigen Fläche und einer deklinanten rechteckigen Fläche von gleicher Länge x. Hier besteht der unmittelbare Vektor welcher alle freien Grenzen dieser Summa in sich aufnimmt, aus drei Gliedern, einer geneigten rechteckigen Fläche von der Länge x und zwei tertiären und entgegengesetzten dreieckigen Flächen, welche der

Ebene YZ parallel sind. Durch die gegenseitige Aufhebung der letzteren beiden bleibt die erstere als reduzirter Vektor zurück, welcher den von den Summanden offen gelassenen Raum nicht vollständig abschliesst, sondern an den Seiten offen lässt.

Betrachten wir jetzt die Addition der Körper. Sind die aneinandergereiheten Körper sämmtlich reell, theils positiv, theils negativ, wie $a, b, -c, \ldots$, so ist ihr Vektor r die reelle Summe $r = a + b - c + \ldots$, nämlich ein reeller Körper, welcher von den freien reellen Grenzflächen der Reihe $a + b - c + \ldots$ begrenzt wird. Dieser Vektor ist jedoch ein reduzirter, da er nur den reellen Raum abschliesst, die vierte Dimension aber offen lässt.

Kommen unter den Theilen $a, b, -c \ldots$ imaginäre oder komplexe Körper vor; so hat man es allgemein mit der Summirung deklinanter Grössen $a_1 e^{\alpha_1 i}$, $a_2 e^{\alpha_2 i}$, $a_3 e^{\alpha_1 i}$ zu thun. Der Vektor $r e^{\phi i}$ ist jetzt komplex

$$r \cos\varphi + r \sin\varphi\, i =$$
$$(a_1 \cos\alpha_1 + a_2 \cos\alpha_2 + a_3 \cos\alpha_3) + (a_1 \sin\alpha_1 + a_2 \sin\alpha_2 + a_3 \sin\alpha_3)\, i$$

Der Vektor erscheint als die Summe eines reellen und eines imaginären Theiles. Jeder dieser beiden Theile bildet sich wie ein Inbegriff gleichartiger Grössen durch einfache Zusammenfügung oder durch Einschliessung in die freien Grenzen dieser Grössen; nachdem Diess geschehen, bleibt die Aufgabe übrig, eine reelle Grösse mit einer imaginären Grösse zu verbinden oder daraus einen deklinanten oder komplexen Vektor herzustellen.

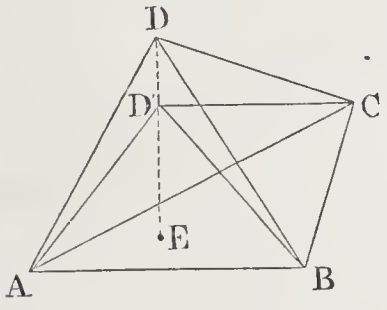
Wenn der reelle Theil a und der imaginäre Theil b nach Inhalt und Form gegeben ist, hat man für den Inhalt des komplexen Körpers nur die eine Bedingung $r = \sqrt{a^2 + b^2}$; ausserdem bestimmt sich die Deklination desselben durch die Formel $tang\ \varphi = \frac{b}{a}$. Soll sich die Verbindung der beiden Theile a und bi in anschaulicher Weise vollziehen; so müssen diese beiden Theile nach dem Vorstehenden eine Fläche XY miteinander gemein haben oder vielmehr ihre zur Grundebene XY parallelen Querschnitte, welche im imaginären Theile bi den Niederschlag in der Richtung ZO bilden, müssen einander gleich sein, a und b müssen also als zwei Kompressionen ein und desselben Körpers r oder b muss als eine Kompression des Körpers a erscheinen, sodass, wenn

$$a = \int xydz \text{ ist, gleichzeitig}$$
$$b = \int xyd(nz) = n \int xydz = na$$

ist. Wäre z. B. a als ein Parallelepipedum von den Seiten x, y, z gegeben, für welches $xyz = a$ ist; so müsste auch b als ein Parallelepipedum und zwar als ein solches von demselben horizontalen Querschnitte xy, jedoch von der Höhe $z' = nz = \frac{a}{b} z$ erscheinen.

Die anschauliche Herstellung des Vektors der Summe der deklinanten Körper $a_1 e^{\alpha_1 i}$, $a_2 e^{\alpha_2 i}$, $a_3 e^{\alpha_3 i}$ erfordert also, dass die beiden Grössen $a_1 \cos\alpha_1 + a_2 \cos\alpha_2 + a_3 \cos\alpha_3 = a$, und $a_1 \sin\alpha_1 + a_2 \sin\alpha_2 + a_3 \sin\alpha_3 = b$ erst als zwei Körper von denselben horizontalen Querschnitten xy und von zwei Höhen, welche sich wie $a:b$ verhalten, dargestellt werden. Denkt man sich z. B. den ersten Theil a als das reelle Tetraeder $ABCD$ (Fig. 41), dessen Basis ABC in der Grundebene XY liegt; so kann der zweite Theil b entweder als ein Tetraeder $ABCD'$ über derselben Grundfläche, jedoch von geringerer Höhe, oder auch als ein Inbegriff verdünnter Querschnitte, welche den ganzen Raum des ersten Tetraeders $ABCD$ erfüllen, also einen verdünnten Raum darstellen, oder auch als ein Niederschlag in der Projektion ABC, welcher dadurch entsteht, dass man alle eben genannten verdünnten Querschnitte des Tetraeders $ABCD$ auf die Basis ABC herabsenkt, aufgefasst werden. Die Summe $a + bi$ oder der Vektor $re^{\phi\iota}$ ist dann der Inbegriff dieser beiden Theile, nämlich des reellen Raumes $ABCD$ und des Niederschlages auf ABC, oder es ist der nicht anschauliche Raum, welcher das reelle Tetraeder $ABCD$ mitsammt dem Niederschlage auf die Basis ABC (oder mitsammt dem Inbegriffe von verdünnten Querschnitten) umfasst. Der hierdurch dargestellte Vektor ist übrigens immer nur ein reduzirter, da durch einen deklinanten Körper $re^{\phi\iota}$, einen reellen Körper $r\cos\varphi$ und einen imaginären Körper $r\sin\varphi . i$ kein vierdimensionaler Raum allseitig abgeschlossen werden kann.

Fig. 41.



Zu einer solchen vollständigen Abschliessung sind vielmehr ausser diesen primären und sekundären Körpern nothwendig noch tertiäre und quartäre Körper erforderlich. Betrachten wir nun die Summirung quadruplexer Körper. Es müssen ihrer mindestens vier gegeben sein, wenn ihr Vektor als fünfter Körper mit ihnen zusammen ein vierdimensionales Gebiet vollständig abschliessen soll. Hat man für diese Körper

$$r_1 e^{\alpha_1 i} e^{\beta_1 i_1} e^{\gamma_1 i_2} = a_1 + b_1 i + c_1 i i_1 + d_1 i i_1 i_2$$
$$r_2 e^{\alpha_2 i} e^{\beta_2 i_1} e^{\gamma_2 i_2} = a_2 + b_2 i + c_2 i i_1 + d_2 i i_1 i_2$$
$$r_3 e^{\alpha_3 i} e^{\beta_3 i_1} e^{\gamma_3 i_2} = a_3 + b_3 i + c_3 i i_1 + d_3 i i_1 i_2$$
$$r_4 e^{\alpha_4 i} e^{\beta_4 i_1} e^{\gamma_4 i_2} = a_4 + b_4 i + c_4 i i_1 + d_4 i i_1 i_2$$

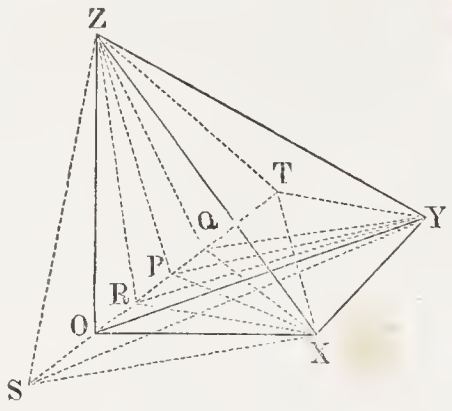
und für deren Summe oder Vektor

$$r e^{\alpha i} e^{\beta i_1} e^{\gamma i_2} = a + bi + c i i_1 + d i i_1 i_2$$

so bestimmen sich die Werthe von a, b, c, d, r, α, β, γ arithmetisch sehr leicht. Geometrisch muss der Vektor $re^{\alpha i} e^{\beta i_1} e^{\gamma i_2}$ als derjenige Körper erscheinen, welcher mit dem primären Körper a, dem sekundären Körper bi, dem tertiären Körper cii_1 und dem quartären Körper $dii_1 i_2$ einen vierdimensionalen Raum vollständig abschliesst. Die vollständigere Definition dieser Grösse ergiebt sich folgendermaassen.

Wenn man von irgend einem Punkte P im Raume nach den Ecken des Tetraeders $OXYZ$ (Fig. 42) die Linien PO, PX, PY, PZ zieht; so zerlegt man dadurch dieses Tetraeder in vier Tetraeder $PXYZ$, $POXY$, $POXZ$, $POYZ$. (Liegt P ausserhalb des gegebenen Tetraeders; so können einige der letzteren negativ werden; die algebraische Summe aller ist immer gleich dem gegebenen Tetraeder). Setzen wir die vier Seitenflächen XYZ, OXY, OXZ, OXZ resp. gleich A, B, C, D, die normalen Abstände des Punktes P von den letzten drei Flächen B, C, D resp. gleich z, y, x, den Abstand OP des Punktes P von O gleich p, den Abstand des Punktes O von der Fläche XYZ gleich h, den Inhalt des Tetraeders $OXYZ$ gleich t. Wenn Q ein zweiter Punkt im Raume ist; so sei der Abstand desselben von der Fläche XYZ, also die Höhe des Tetraeders $QXYZ$ über dieser Fläche gleich k. Der Inhalt des Vektors (r), für welchen man

Fig. 42.



$$(r) = a + bi + cii_1 + dii_1i_2$$

hat, sei gleich r. Da die Koordinaten z, y, x des Punktes P und der Abstand k des Punktes Q von der Fläche XYZ nach den Bedingungen $\frac{1}{3}Ak = a$, $\frac{1}{3}Bz = b$, $\frac{1}{3}Cy = c$, $\frac{1}{3}Dx = d$ bestimmt werden können, indem man danach $k = \frac{3a}{A}$, $z = \frac{3b}{B}$, $y = \frac{3c}{C}$, $x = \frac{3d}{D}$ hat; so können die vier Tetraeder $QXYZ$, $POXY$, $POXZ$, $POYZ$ die Inhalte des primären, sekundären, tertiären und quartären Theiles einer Grösse r vertreten, d. h. man kann setzen

$$QXYZ = \frac{1}{3}Ak = a = r\cos\alpha$$

$$POXY = \frac{1}{3}Bz = b = r\sin\alpha\cos\beta$$

$$POXZ = \frac{1}{3}Cy = c = r\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma$$

$$POYZ = \frac{1}{3}Dx = d = r\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$$

und daraus die vier unbekannten Grössen r, α, β, γ bestimmen. Für den Inhalt r hat man

$$r^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = \frac{1}{9}(A^2k^2 + B^2z^2 + C^2y^2 + D^2x^2)$$

Wenn man den Vektor r als ein Tetraeder $RXYZ$ mit der Basis $XYZ = A$ darstellt, ergiebt sich seine Höhe l durch die Formel

$$l = \frac{1}{A}\sqrt{A^2k^2 + B^2z^2 + C^2y^2 + D^2x^2}$$

Die Höhe l des tetraederförmigen Vektors r erscheint hiernach als die Hypotenuse eines Dreieckes, dessen eine Kathete k und dessen andere Kathete die Diagonale eines rechtwinkligen Parallelepipedums mit den Kanten $\frac{Bz}{A}$, $\frac{Cy}{A}$, $\frac{Dx}{A}$ ist.

Wenn der primäre, sekundäre, tertiäre und quartäre Theil des Vektors r nur nach seinem Inhalte a, b, c, d gegeben ist, wenn also die Flächen A, B, C, D nicht von vornherein gegeben sind, kann über dieselben in mehrfacher Weise verfügt werden, was auf die Lage der beiden Punkte P und Q von Einfluss ist. Von den verschiedenen möglichen Variationen zeichnen sich folgende drei aus, bei welchen allen zunächst die Bedingung erfüllt wird, dass der Punkt P in dem von O auf die Fläche XYZ gefällten Perpendikel OT liege. Bezeichnet man mit φ, ψ, χ die Neigungswinkel der Fläche XYZ resp. gegen die Ebenen OXY, OXZ, OYZ oder die Neigungswinkel der Normalen OT gegen die Axen OZ, OY, OX; so ist

$$p\cos\varphi = z \quad p\cos\psi = y \quad p\cos\chi = x$$

also

$$\frac{z}{\cos\varphi} = \frac{y}{\cos\psi} = \frac{x}{\cos\chi}$$

Ausserdem ist

$$B = A\cos\varphi \quad C = A\cos\psi \quad D = A\cos\chi$$

also

$$\frac{B}{z} = \frac{C}{y} = \frac{D}{x}$$

$$l = \sqrt{k^2 + z^2\cos^2\varphi + y^2\cos^2\psi + x^2\cos^2\chi}$$

oder auch

$$l = \sqrt{k^2 + p^2(\cos^4\varphi + \cos^4\psi + \cos^2\chi)}$$

Diese Höhe l ist die Hypotenuse eines Dreieckes, dessen eine Kathete k und dessen andere Kathete die Diagonale eines rechtwinkligen Parallelepipedums mit den Kanten $p\cos^2\varphi$, $p\cos^2\psi$, $p\cos^2\chi$ oder mit den Kanten $z\cos\varphi$, $y\cos\psi$, $x\cos\chi$ ist. In der Formel für l kann man $\cos\varphi$, $\cos\psi$, $\cos\chi$ durch $\frac{B}{A}$, $\frac{C}{A}$, $\frac{D}{A}$ ersetzen.

Dass man in allen Fällen

$$p^2 = x^2 + y^2 + z^2$$
$$A^2 = B^2 + C^2 + D^2$$
$$1 = \cos^2\varphi + \cos^2\psi + \cos^2\chi$$
$$t = \frac{1}{3}\sqrt{2BCD} \quad h = \frac{3t}{A} = \frac{\sqrt{2BCD}}{A}$$

hat, versteht sich von selbst.

Die drei erwähnten wichtigen Fälle unterscheiden sich durch die Bedingung, welche die Punkte P und Q gegeneinander festlegt. Offenbar kann der Punkt Q, da er nur durch die Höhe k über der Fläche XYZ definirt ist, stets in der Normalen OT auf dieser Fläche angenommen werden, sodass $OT = k$ ist. Die drei Fälle sind nun diese.

Erster Fall. Der Punkt Q fällt mit dem Punkte P zusammen. Alsdann ist $k + p = h$ und

$$t = a + b + c + d = \frac{1}{3}(Ak + Bz + Cy + Dx)$$

$$= \frac{1}{3} A (k + p) = \frac{1}{3} Ah$$

und da $p = h - k$ ist, hat man

$$l = \sqrt{k^2 + (h - k)^2 (\cos^4 \varphi + \cos^4 \psi + \cos^4 \chi)}$$

Das Quadrat des Tetraeders $RXYZ$ erscheint jetzt als die Summe der Quadrate der vier Tetraeder $PXYZ, POXY, POXZ, POYZ$, welche das Tetraeder $OXYZ$ ausmachen. Das Tetraeder $PXYZ$ bildet sowohl in der Summe $a + bi + cii_1 + diii_1 i_2$, als auch in dem Vektor (r) den primären oder den anschaulichen Bestandtheil. Ohne Frage ist jetzt $r < t$, der Punkt R liegt also im Innern des Tetraeders $OXYZ$.

Zweiter Fall. Die Punkte P und Q werden so bestimmt, dass R in O fällt, dass also der Inhalt des Vektors dem Tetraeder $OXYZ$ gleich wird. Zu dem Ende muss $t = r$ oder

$$l = h = \sqrt{k^2 + p^2 (\cos^4 \varphi + \cos^4 \psi + \cos^4 \chi)}$$

sein.

Dritter Fall. Es wird so disponirt, dass der Punkt Q in O fällt, dass also das Tetraeder $OXYZ = t$ den primären oder anschaulichen Theil a des Vektors r repräsentirt, dessen Spitze S jetzt ausserhalb des Tetraeders t in der Verlängerung der Normalen TO liegen wird. Jetzt muss $t = a$ oder $h = k$ werden und man hat

$$l = \sqrt{h^2 + p^2 (\cos^4 \varphi + \cos^4 \psi + \cos^4 \chi)}$$

Eine interessante Spezialität des letzten Falles ist die, wo der Punkt P in die Fläche XYZ, also mit dem Fusspunkte T der Normalen OT zusammenfällt. Für diesen Fall wird

$$p = k = h, \quad t = a = b + c + d, \quad a + b + c + d = 2t$$

und man hat, da allgemein

$$t = \frac{1}{3}\sqrt{2BCD} \text{ und } h = \frac{\sqrt{2BCD}}{A}$$

ist, indem die Inhalte von a, b, c, d durch die Tetraeder $OXYZ$, $OTXY$, $OTXZ$, $OTYZ$ repräsentirt werden,

$$a = \frac{1}{3}\sqrt{2BCD} \qquad b = \frac{1}{3}\frac{B^2}{A^2}\sqrt{2BCD}$$

$$c = \frac{1}{3}\frac{C^2}{A^2}\sqrt{2BCD} \qquad d = \frac{1}{3}\frac{D^2}{A^2}\sqrt{2BCD}$$

$$r = \frac{\sqrt{2BCD}}{3A^2}\sqrt{A^4 + B^4 + C^4 + D^4}$$

$$l = \frac{\sqrt{2BCD}}{A^3}\sqrt{A^4 + B^4 + C^4 + D^4}$$

Für die Deklination, Inklination und Reklination des Vektors r ergiebt sich jetzt

$$\cos\alpha = \frac{a}{r} = \frac{A^2}{\sqrt{A^4 + B^4 + C^4 + D^4}}$$

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{B^4 + C^4 + D^4}}{\sqrt{A^4 + B^4 + C^4 + D^4}}$$

$$\cos\beta = \frac{B^2}{\sqrt{B^4 + C^4 + D^4}} \qquad \sin\beta = \frac{\sqrt{C^4 + D^4}}{\sqrt{B^4 + C^4 + D^4}}$$

$$\cos\gamma = \frac{C^2}{\sqrt{C^4 + D^4}} \qquad \sin\gamma = \frac{D^2}{\sqrt{C^4 + D^4}}$$

Diese Formeln sind dadurch beachtenswerth, dass sie alle unbekannten Grössen durch die Seitenflächen A, B, C, D des Tetraeders $OXYZ$ ausdrücken. Die Grösse r stellt den Inhalt des Tetraeders $SXYZ$ dar. Will man denselben mittelst seiner eigenen Seitenflächen ausdrücken; so seien die drei Flächen $SXY = B'$, $SXZ = C'$, $SYZ = D'$, während die vierte $XYZ = A$ ist. Da die Kanten des Tetraeders $OXYZ$

$$OX = \sqrt{\frac{2BC}{D}}, \quad OY = \sqrt{\frac{2BD}{C}}, \quad OZ = \sqrt{\frac{2CD}{B}}$$

$$XY = \sqrt{\frac{2B(C^2 + D^2)}{DC}} \qquad XZ = \sqrt{\frac{2C(B^2 + D^2)}{BD}}$$

$$YZ = \sqrt{\frac{2D(B^2 + C^2)}{BC}}$$

und da

$$B' = \frac{1}{2}(XY)\sqrt{l^2 + \frac{h^2}{tang^2\varphi}}$$

$$C' = \frac{1}{2}(XZ)\sqrt{l^2 + \frac{h^2}{tang^2\psi}}$$

$$D' = \frac{1}{2}(YZ)\sqrt{l^2 + \frac{h^2}{tang^2\chi}}$$

ist; so ergiebt sich

$$B'^2 = \frac{B^2}{A^6}\{A^6 + (C^2 + D^2)(B^4 + C^4 + D^4)\}$$

$$C'^2 = \frac{C^2}{A^6}\{A^6 + (B^2 + D^2)(B^4 + C^4 + D^4)\}$$

$$D'^2 = \frac{D^2}{A^6}\{A^6 + (B^2 + C^2)(B^4 + C^4 + D^4)\}$$

Vermöge dieser drei Gleichungen kann B, C, D durch A, B', C', D' ausgedrückt werden. Eine Substitution dieser Werthe in r giebt dann die Formel des Tetraeders $SXYZ$ durch seine vier Seitenflächen. Beachtenswerth ist noch der mit Hülfe der sechs Grössen B, C, D, B', C', D' sich ergebende Ausdruck

$$r = \frac{1}{3\sqrt{BCD}}\sqrt{B^2C^2D'^2 + C^2D^2B'^2 + B^2D^2C'^2 - B^2C^2D^2}$$

Diese Formel gilt für ein Tetraeder $SXYZ$, welches so beschaffen ist, dass das von seiner Spitze S auf die Basis XYZ gefällte Perpendikel ST den Scheitel O der über der Basis XYZ liegenden rechtwinkligen Ecke aufnimmt. Auf ein beliebiges Tetraeder von der Basis XYZ und der Höhe l, also dem Inhalte r kann jene Formel erst in Anwendung gebracht werden, nachdem seine Spitze parallel zur Basis XYZ in das Perpendikel TOS verschoben ist.

Durch die obigen Formeln ist der körperliche Vektor (r) eines quadruplexen, aus einem primären, sekundären, tertiären und quartären Theile von gegebenem Inhalte a, b, c, d bestehenden Körpers bestimmt. Die möglichen Variationen betreffen nur die Form jenes Vektors, nicht seinen Inhalt, welcher stets gleich $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$ ist. Das Tetraeder, welches diesen Inhalt darstellt und in Fig. 42 bald als $RXYZ$, $OXYZ$, $SXYZ$ dargestellt ist, hat doch immer denselben Inhalt r indem für die verschiedenen Voraussetzungen die Flächen B, C, D, und demgemäss die Basis $XYZ = A$ und die Höhe l dieses Tetraeders, andere Werthe annehmen. Jene Variationen finden also nur so lange statt, als die einzelnen Theile des quadruplexen Körpers nur ihrem Inhalte nach gegeben sind; sie verschwinden, sobald diese Theile vollständig, nach Inhalt, Ort und Form gegeben sind. Ganz das Nämliche gilt für komplexe Flächen, welche nur dann vollkommen bestimmt sind, wenn ihre Projektionen es sind: ja, es gilt auch für Linien, indem der Ort einer Linie auch von dem Orte ihrer Projektionen abhängt, also nicht durch die Grösse dieser Projektionen allein bestimmt ist.

Unter allen Umständen erscheint der Vektor (r) als eine Grösse, deren anschaulicher dreidimensionaler Theil $QXYZ$ dem gegebenen primären Theile a gleich ist. Der sekundäre, tertiäre und quartäre Theil von (r)

kann, wenn man will, als ein Niederschlag auf die Theile TXY, TXZ, TYZ von der Quantität a, b, c und entsprechend den Niederschlagsrichtungen ZO, YO, XO angesehen werden.

Übrigens repräsentirt die rechtwinklige körperliche Ecke $OXYZ$ mit ihren einzelnen tetraederförmigen Theilen, resp. den Niederschlägen auf ihre Seitenflächen den quadruplexen Körper $a + bi + cii_1 + dii_1i_2$ unmittelbar. Jeder polyedrische Körper lässt sich durch Schnitte, welche den Ebenen eines Koordinatensystems parallel sind, in rechtwinklige Ecken und Parallelepipeden zerlegen, und hierdurch wird es möglich, die Inbegriffe mehrerer quadruplexen Grössen als polyedrische Körper darzustellen oder, umgekehrt, solche Körper als Aneinanderfügungen quadruplexer oder deklinanter, inklinanter und reklinanter Grössen erscheinen zu lassen.

Da die Deklination, Inklination und Reklination der Körper ebenso wie die vierte Dimension nicht in der Anschauung, sondern nur in der Idee existirt und demzufolge für jeden anschaulich gegebenen Körper einen unbestimmten, beliebig festzusetzenden Werth hat; so sind alle Darstellungen einer körperlichen Richtung, einer vierdimensionalen Grösse, einer Grösse, welche neben anschaulichen Dimensionen eine nicht anschauliche besitzen soll, nur Hülfsmittel zur Erleichterung der Entwicklung abstrakter Gesetze, aber keineswegs die wahren Repräsentanten der darunter gedachten ideellen Grössen. Hierdurch erklärt sich die Verschiedenheit der Formen und Konstruktionen, in welchen wir vorstehend und in den früheren Paragraphen die fraglichen Grössen vorgeführt haben. Die letzten Rechnungen betreffen vornehmlich die Bestimmung der Quantitätswerthe der aus einfacheren Theilen von verschiedener Qualität zusammengesetzten Grössen: kombinirt man die Rechnung mit den in §. 12 aufgestellten Anschauungen, welche der Deklination, Inklination und Reklination der Körper bestimmte geometrische Veränderungen zur Seite stellen; so ergeben sich die Resultate in anschaulicheren und zu manchen Zwecken geeigneten Formen.

§. 15.

Die vierdimensionale Grösse als Ort eines variabelen Punktes.

Das Wesen eines Grössengebietes verleiht den fünf Grundeigenschaften und den fünf Grundprozessen seiner Grössen einen eigenartigen Charakter. Die Hauptdimensitätsgebiete eines allgemeinen Grössengebietes erscheinen als spezielle Grössengebiete; so erscheint das undimensionale, das eindimensionale, das zweidimensionale, das dreidimensionale, das vierdimensionale u. s. w. Gebiet als eine Spezialität des allgemeinen Raumgebietes oder Punkte, Linien, Flächen, Körper, vierdimensionale Grössen u. s. w.

erscheinen als Raumgrössen von spezieller Qualität. Demzufolge charakterisiren sich die Grundeigenschaften und Grundprozesse der Punkte, Linien, Flächen, Körper durch ein eigenartiges Wesen. Beispielsweise hat die erste Grundeigenschaft, welche in arithmetischer Abstraktion Quantität heisst (und als Grundoperation die Numeration erzeugt), für Punkte die Bedeutung von Anzahl, für Linien die von Länge, für Flächen die von Flächeninhalt, für Körper die von Volum u. s. w., und der erste Grundprozess, welcher in arithmetischer Abstraktion Vermehrung (Grenzerweiterung) heisst, für Punkte die Bedeutung von Vermehrung, für Linien die von Verlängerung, für Flächen die von Ausbreitung, für Körper die von dreidimensionaler Erweiterung. Ebenso ist die dritte Grundeigenschaft, das arithmetische Verhältniss, für Punkte ein Verhältniss, für Linien eine Linienrichtung, für Flächen eine Flächenrichtung, für Körper eine Körperrichtung, und der dritte Grundprozess, welcher die arithmetische Verhältnissbildung ausmacht (und als Grundoperation die Multiplikation bedingt) gestaltet sich für Punkte zu einer Verhältnissbildung oder Vervielfachung, für Linien zu einer Drehung um einen Punkt, für Flächen zu einer Drehung um eine Axe, für Körper zu einer Drehung um eine Ebene (körperliche Drehung). Vervielfachung, Deklination, Inklination, Reklination sind Neutralitätsstufen dieses dritten oder Multiplikationsprozesses; sie haben für Punkte eine andere Bedeutung wie für Linien, für Flächen, für Körper. Man kann generell eine Grundeigenschaft der Punkte eine punktuelle oder undimensionale Grundeigenschaft, eine Grundeigenschaft der Linien eine lineare oder eindimensionale, eine Grundeigenschaft der Flächen eine superfizielle oder zweidimensionale, eine Grundeigenschaft der Körper eine körperliche, kubische oder dreidimensionale u. s. w. nennen.

Ebenso wie die fünf Grundeigenschaften zerfallen die fünf Grundprozesse und die fünf Grundoperationen der Raumgrössen in punktuelle, lineare, superfizielle, kubische u. s. w. oder in un-, ein-, zwei-, dreidimensionale, von denen jede höhere Qualitätsstufe sich durch einen eigenartigen Charakter auszeichnet. In §. 12 bis 14 haben wir nicht nur Körper, sowie Eigenschaften und Prozesse der Körper schlechthin, sondern wir haben ganz speziell kubische Eigenschaften und kubische Prozesse der Körper betrachtet: ebenso waren in §. 13 nicht einfach Flächen, sondern superfizielle Eigenschaften und Prozesse der Flächen, in §. 10 nicht einfach Linien, sondern lineare Eigenschaften und Prozesse der Linien Gegenstand der Betrachtung. Nach dem Kardinalprinzipe stehen alle Eigenschaften und Prozesse eines Grössengebietes durch Grundsätze miteinander dergestalt in Verbindung, dass jeder Prozess Effekte der übrigen vier Prozesse hervorbringt. In der Erweiterung (Vermehrung, Numeration) liegt zugleich ein Fortschritt (eine Anreihung, Addition), ferner ein Verhältnissprozess (eine Vervielfältigung, Drehung, Multiplikation, ferner eine Dimensionirung (Beschreibung, Potenzirung), endlich eine Gestaltung (Variation).

Vermöge des prinzipiellen Zusammenhanges der Grundeigenschaften ist eine n-dimensionale Grösse zugleich ein unendlicher Inbegriff von $(n - m)$-dimensionalen Grössen und sie ist auch ein unendlich kleines Element einer $(n + m)$-dimensionalen Grösse, sie ist also ebensowohl eine unendlich grosse $(n - m)$-dimensionale, als auch eine unendlich kleine $(n + m)$-dimensionale Grösse. So ist z. B. eine Fläche ein Inbegriff von Linien oder von Punkten und auch ein Element eines Körpers. Jede Raumgrösse, da sie mehr als keine Dimension hat, kann als ein unendlicher Inbegriff von Punkten oder als eine unendliche Punktgrösse angesehen werden. Diese Auffassung sieht die Grösse prinzipiell als eine Quantität oder als das Resultat eines Erweiterungsprozesses an. Dieselbe Grösse kann jedoch ebenso gut das Resultat eines Fortschritts-, eines Drehungs-, eines Beschreibungs-, eines Gestaltungsprozesses sein; man kann also, um allen diesen fünf Entstehungsweisen Ausdruck zu geben, eine jede Raumgrösse, von welcher Dimensität sie auch sein möge, als den Ort eines variabelen Punktes ansehen, welcher den Körper beschreibt, indem er als Endpunkt einer Linie den Veränderungen dieser Linie folgt. Bei dieser Auffassung wird eine variabele Linie das wesentliche Bestimmungsstück der durch ihren Endpunkt beschriebenen Grösse; es kommen also vornehmlich nur lineare Eigenschaften und lineare Prozesse in Betracht. Im Nachstehenden nehmen wir den oben erörterten, von dem in §. 12 bis 14 beobachteten sich wesentlich unterscheidenden Standpunkt ein, wir fassen also jetzt jede Linie, jede Fläche, jeden Körper, jede vier- und mehrdimensionale Grösse als den Ort eines variabelen Punktes auf und bestimmen den Ort dieses Punktes durch den vom Nullpunkte nach ihm hinführenden linearen Vektor oder linearen Koordinatenzug.

Unter diesem Gesichtspunkte wird, wenn x, y, z, u rechtwinklige, parallel zu den Axen OX, OY, OZ, OU gemessene Koordinaten bedeuten, nach den bekannten Methoden der analytischen Geometrie ein Punkt durch keine unabhängigen Variabelen, sondern durch Konstanten c mittelst der Formel $x = F(c)$, eine Linie durch eine unabhängige Variabele x mittelst der Formel $y = F(x)$, eine Fläche durch zwei unabhängige Variabelen x, y mittelst der Formel $z = F(x, y)$, ein Körper durch drei unabhängige Variabelen x, y, z mittelst der Formel $u = F(x, y, z)$ bestimmt. Eine jede solche Formel enthält ausser den unabhängigen Variabelen eine einzige abhängige Variabele. Die Gleichung des Punktes kann also auch in der Form $F(x) = 0$, die der Linie $F(x, y) = 0$, die der Fläche in der Form $F(x, y, z) = 0$ und die des Körpers in der Form $F(x, y, z, u) = 0$ geschrieben werden. Der hierdurch dargestellte Punkt liegt in der Grundaxe OX, die dargestellte Linie in der Grundebene XY, die dargestellte Fläche im Grundraume XYZ und der dargestellte Körper im vierdimensionalen Grundgebiete $XYZU$.

Soll der darzustellende Punkt in der Grundebene XY liegen; so sind zwei Gleichungen $F(x) = 0, F_1(y) = 0$ mit je einer Variabelen erforderlich. Soll er im Grundraume XYZ liegen, so sind drei solche Gleichungen

$$F(x) = 0, \quad F_1(y) = 0, \quad F_2(z) = 0$$

erforderlich. Soll er im vierdimensionalen Grundgebiete liegen; so sind vier solche Gleichungen

$$F(x) = 0, \quad F_1(y) = 0, \quad F_2(z) = 0, \quad F_3(u) = 0$$

(oder überhaupt vier Gleichungen zwischen den vier Variabelen x, y, z, u) nöthig.

Soll die darzustellende Linie im Grundraume XYZ liegen; so sind zwei Gleichungen mit je zwei Variabelen $F(x, y) = 0$, $F_2(y, z) = 0$ erforderlich. Soll sie im vierdimensionalen Grundgebiete $XYZU$ liegen; so sind drei solche Gleichungen

$$F(x, y) = 0, \quad F_1(y, z) = 0, \quad F_2(z, u) = 0$$

(oder überhaupt drei Gleichungen zwischen den Variabelen x, y, z, u) nöthig.

Soll die darzustellende Fläche im vierdimensionalen Grundgebiete liegen; so bedarf es zwei Gleichungen mit je drei Variabelen

$$F(x, y, z) = 0, \quad F_1(y, z, u) = 0$$

(oder überhaupt zwei Gleichungen zwischen den vier Variabelen x, y, z, u).

Die in der analytischen Geometrie übliche Darstellungsweise durch Koordinaten x, y, z, u ist halb arithmetische Abstraktion, halb geometrische Anschauung, indem sie verlangt, die Grössen x, y, z, u in verschiedenen Richtungen zu denken. Demzufolge haben diese Grössen ganz verschiedene arithmetische Werthe; sie sind neutrale Grössen, welchen die Richtungskoeffizienten 1, i, ii_1, ii_1i_2 zukommen. Der wahre arithmetische Ausdruck für eine Raumgrösse, wenn diese Grösse als der Ort eines variabelen Punktes aufgefasst wird, ist daher

$$(r) = x + yi + zii_1 + uii_1i_2$$

worin (r) der vom Nullpunkte O nach irgend einem Orte des variabelen Punktes führende lineare Vektor ist. Diese Formel stellt so gut einen Punkt, wie eine Linie, wie eine Fläche, wie einen Körper in jedem Dimensitätsgebiete dar, und diese vier Grössenqualitäten unterscheiden sich jetzt nur dadurch, dass die vier Grössen x, y, z, u für einen Punkt von keiner, für eine Linie von einer, für eine Fläche von zwei, für einen Körper von drei independenten Variabelen abhängen: die echte arithmetische Formel giebt also zugleich die denkbar allgemeinste und einfachste Darstellungsweise.

Diese Formel stellt den Vektor (r) als das Aggregat neutraler Glieder oder als das Resultat des Fortschrittsgesetzes dar. Als Produkt neutraler Faktoren oder als Resultat des Verhältniss- oder Drehungsgesetzes hat (r) die Form:

$$(r) = r e^{\phi i} e^{\psi i_1} e^{\chi i_2}$$

worin r das numerische Verhältniss (die Länge), φ die Deklination, ψ die Inklination, χ die Reklination, also vier neutrale Verhältnissgrössen bezeichnen. Diese Grössen sind nach der Terminologie der analytischen Geometrie die Polarkoordinaten des darzustellenden Punktes. Auch sie hängen für einen Punkt von keiner, für eine Linie von einer, für eine Fläche von zwei, für einen Körper von drei independenten Variabelen ab. Der aus den drei Exponentialgrössen bestehende Faktor $e^{\phi\, i}\, e^{\psi\, i_1}\, e^{\chi\, i_2}$ ist der Richtungskoeffizient von (r); er bestimmt die Richtung der Linie r, welche in den fraglichen Punkt führt.

Eine Entwicklung der Faktoren des letzteren Ausdruckes ergiebt den Werth von (r) mit abgekürztem Richtungskoeffizienten in der Form

$$(r) = r\cos\varphi + r\sin\varphi\cos\psi\,.\,i + r\sin\varphi\sin\psi\cos\chi\,.\,ii_1 + r\sin\varphi\sin\psi\sin\chi\,.\,ii_1 i_2$$

Dieser Werth ist mit dem obigen Aggregate identisch; man hat also zwischen den orthogonalen und polaren Koordinaten die Beziehungen

$$x = r\cos\varphi \qquad y = r\sin\varphi\cos\psi \qquad z = r\sin\varphi\sin\psi\cos\chi$$
$$u = r\sin\varphi\sin\psi\sin\chi$$

Die vierte Dimension u ist nicht anschaulich; sie wird von dem Punkte P, welcher durch die vorstehende Formel dargestellt wird, involvirt; der Verstand erkennt darin eine Grösse von der Quantität u; das Anschauungsvermögen schaut diese Quantität jedoch nur in dem Punkte P an. Demnach ist das Wort Ausdehnung oder Länge, wenn dasselbe auf die Grösse u angewandt wird, nur ein Name für einen Begriff, welcher keine eigentliche oder wirkliche Länge bedeutet und daher besser mit einem anderen Namen vertauscht würde. Dichtigkeit ist ein passenderer Ausdruck, wiewohl hierunter nicht ohne Weiteres materielle, nach allen Richtungen gleiche Dichtigkeit, sondern nur eine lineare Dichtigkeit verstanden werden kann.

Da ein Theil des Vektors (r) nicht anschaulich ist; so ist der ganze Vektor nicht anschaulich. Die Anschauung von (r) ist die anschauliche Linie OP, welche vom Nullpunkte O nach dem Endpunkte des primären, sekundären und tertiären Gliedes von (r) führt. Diesen anschaulichen Theil von (r) nennen wir den anschaulichen Vektor: indem wir denselben mit (s) bezeichnen, ist

$$(s) = x + yi + zii_1$$

Dem anschaulichen Vektor fehlt die nicht anschauliche Reklination: wird derselbe also als das Resultat einer anschaulichen Vervielfachung s, einer anschaulichen Deklination φ' und einer anschaulichen Inklination ψ' dargestellt, sodass

$$(s) = s\,e^{\phi'\,i}\,e^{\psi'\,i_1} = s\cos\varphi' + s\sin\varphi'\cos\psi'\,.\,i + s\sin\varphi'\sin\psi'\,.\,i\,i_1$$

ist; so bestimmen sich die Werthe von s, φ', ψ' durch die Bedingungen

$$s \cos \varphi' = x = r \cos \varphi$$
$$s \sin \varphi' \cos \psi' = y = r \sin \varphi \cos \psi$$
$$s \sin \varphi' \sin \psi' = z = r \sin \varphi \sin \psi \cos \chi$$

Dieselben ergeben

$$s = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = r \sqrt{1 - \sin^2 \varphi \sin^2 \psi \sin^2 \chi}$$
$$tang \varphi' = \frac{\sqrt{y^2 + z^2}}{x} = tang \varphi \sqrt{1 - \sin^2 \psi . \sin^2 \chi}$$
$$tang \psi' = \frac{z}{y} = tang \psi \cos \chi$$

Da s die anschauliche Länge oder der räumliche Inhalt des Vektors (r) ist; so werden wir die arithmetische Quantität $r = \sqrt{s^2 + u^2}$ des nicht anschaulichen Vektors (r) seine Masse nennen. Die anschauliche Länge $s = OP$ repräsentirt die Masse r des vollständigen Vektors, wenn man sich dieselbe als eine verdichtete Linie, nämlich als eine Linie vorstellt, in welcher die Länge $r = \sqrt{s^2 + u^2}$ einer natürlichen Linie auf die Länge s komprimirt ist.

Wir müssen an dieser Stelle eine für das Verständniss der Formeln oder für die Anwendung abstrakter Formeln auf die anschauliche Wirklichkeit folgende wichtige Bemerkung wiederholen. Wenn unter den Variabelen der Funktion $F(x, y, z \ldots)$ mindestens eine independente vorkömmt und man für dieselbe jeden beliebigen Werth zulassen will; so kann die Funktion F jeden beliebigen Werth darstellen, sie wird dann also, wie sie auch beschaffen sein möge, stets das gesammte Grössengebiet darstellen. So repräsentirt z. B. die Formel $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ stets den ganzen unendlichen Raum, wenn man für x alle positiv und negativ reellen, imaginären, komplexen und überkomplexen Werthe zulässt: denn damit y irgend einen beliebigen Werth y' annehme, braucht man dem x nur den Werth $x = \sqrt{a^2 - y^2}$ zu geben, welcher immer ein Grössenwerth ist. Bei der Voraussetzung der Variabilität der independenten Variabelen in allen Neutralitäts- und Qualitätsgebieten besitzt also keine Formel die Fähigkeit, eine bestimmt begrenzte Grösse darzustellen; diese Fähigkeit hat sie nur unter der Voraussetzung, dass die Variabilität der Independenten sich auf ein bestimmt begrenztes Gebiet beschränke. Über dieses Variabilitätsgebiet der Independenten kann man beliebige Bestimmungen treffen; jede spezielle Bestimmung verleiht der durch die Funktion F dargestellten Grösse einen bestimmten Charakter. Man kann z. B. festsetzen, dass die Independente x im Gebiete aller reellen und imaginären oder aller komplexen Linien variiren solle: alsdann stellt $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ eine gewisse Fläche dar. Man kann auch festsetzen, dass die Indepen-

dente x im Gebiete aller reellen Linien variiren solle: alsdann stellt $y = \sqrt{a - x^2}$ eine Kreislinie vom Radius a nebst der unendlichen geraden Linie dar, welche in der Richtung der reellen Axe durch den Mittelpunkt dieses Kreises geht (denn für einen Werth von x, welcher $> a$ ist, wird $y = b\sqrt{-1} = be^{\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}}$, stellt also eine um 90 Grad von der Ordinatenaxe OY abweichende, d. h. in die Abszissenaxe fallende Ordinate dar).

Wir gehen im Nachfolgenden von der Voraussetzung aus, dass die unabhängigen Variabelen nur innerhalb des Gebietes der reellen Grössen variirt werden, und dass von den Werthen, welche hierbei die abhängigen Variabelen annehmen, ebenfalls nur die reellen zugelassen werden sollen. Unter dieser Vorbedingung, wo für die Variabelen x, y, z, u nur reelle Werthe in Betracht gezogen werden, stellt die Funktion $F(x, y, z, u) = 0$ einen bestimmten, im vierdimensionalen Gebiete liegenden Körper oder eine vierdimensionale Grösse dar. Indem man hierin die vierte Dimension oder die Dichtigkeit $u = 0$ setzt, ergiebt die Funktion $F(x, y, z, o) = 0$ eine anschauliche Fläche, in welcher alle Punkte liegen, deren Dichtigkeit null ist, oder welche volle Anschaulichkeit haben. Diese Fläche begrenzt einen anschaulichen Körper, d. h. sie schliesst auf der einen Seite einen Körper ein und auf der anderen einen Körper aus: der erste oder innere Körper kann endlich und auch unendlich sein, ebenso kann der letztere oder äussere Körper endlich oder unendlich sein; jedenfalls ist einer von beiden unendlich, während der andere endlich oder unendlich ist, da beide zusammen den unendlichen anschaulichen Raum XYZ ausmachen. Der innere Körper unterscheidet sich von dem äusseren durch eine besondere Eigenschaft der Dichtigkeit u, und wir betrachten hier vornehmlich zwei Fälle. Der erste Fall umfasst die Klasse von Funktionen $F(x, y, z, u) = 0$, welche für alle möglichen Werthe der unabhängigen Variabelen x, y, z einen reellen Werth für die Dichtigkeit u ergeben, für welche also, wenn diese Funktion für u aufgelös't wird,

$$u = f(x, y, z)$$

stets reell ist. Für diese Klasse umfasst die Grösse $F(x, y, z, u) = 0$ alle Punkte des anschaulichen Raumes; der innere, von der Fläche $f(x, y, z) = 0$ eingeschlossene Körper, sowie auch der äussere Körper enthält Punkte von reeller, der eine jedoch von positiver und der andere von negativer Dichtigkeit u.

Der einfachste Fall dieser Art ist durch die Funktion ersten Grades

$$u = a + bx + cy + dz$$

repräsentirt. Die Grenzfläche der Dichtigkeit ist dann die durch

$$a + bx + cy + dz = 0$$

dargestellte Ebene. Der innere und der äussere Körper ist der diesseit

und der jenseit dieser Ebene liegende Theil des gesammten Raumes. Jeder Punkt des diessseitigen Raumes hat positive, jeder Punkt des jenseitigen Raumes dagegen negative Dichtigkeit vom Werthe

$$u = a + bx + cy + dz$$

Die zweite Klasse umfasst diejenigen Funktionen F, welche für gewisse Werthe von x, y, z eine reelle, für gewisse Werthe aber eine nicht reelle Dichtigkeit u haben. Eine Grösse F von dieser Klasse umfasst also nicht den ganzen anschaulichen Raum, sondern nur einen Theil davon, nämlich nur den von der Fläche $f(x, y, z) = 0$ einseitig begrenzten Theil, also entweder den inneren oder den äusseren Körper dieser Fläche. Während der eine dieser beiden Körper überall reelle Dichtigkeit hat, besitzt der andere überall nicht reelle (imaginäre, komplexe oder überkomplexe) Dichtigkeit. Der einfachste Fall dieser Art entspricht der quadratischen Funktion

$$u = \sqrt{a + bx + cy + dz}$$

Die Begrenzungsfläche ist zwar wie vorhin eine Ebene

$$a + bx + cy + dz = 0$$

allein die in Rede stehende Grösse umfasst nicht wie früher den ganzen Raum, sondern nur den auf der einen Seite dieser Ebene liegenden Raum, nämlich denjenigen Theil, wofür $a + bx + cy + dz$ einen positiven, die Dichtigkeit u mithin einen reellen Werth hat.

Wenn die anschauliche Oberfläche der darzustellenden Grösse durch die Formel $f(x, y, z) = 0$ gegeben ist; so können für die Grösse selbst unendlich viel verschiedene Formeln $F(x, y, z, u) = 0$ aufgestellt werden, weil die Dichtigkeit ihrer Punkte nach sehr verschiedenen Gesetzen variiren kann. Die generelle Bedingung besteht nur darin, dass die Funktion

$$F(x,y,z,o) = f(x,y,z)$$

sei. Unter vielen anderen möglichen Funktionen erfüllt

$$cu^{2n} = f(x,y,z)$$

worin n eine ganze Zahl und c eine beliebige konstante oder variabele Grösse ist, den Zweck. Um z. B. eine Kugel vom Radius r, deren Mittelpunkt im Nullpunkte O liegt, als vierdimensionale Grösse oder als verdichtete Kugel darzustellen, hat man für die Oberfläche derselben

$$r^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0$$

Demnach ist

$$u = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2 - z^2}$$

eine Gleichung der verdichteten Kugel oder einer Kugel vom Radius r, deren Punkte verdichtete Massen repräsentiren. Die Dichtigkeit an der Oberfläche dieser Kugel ist null, im Mittelpunkte aber gleich r, über-

haupt hat die Dichtigkeit in dem Abstande $r' = x^2 + y^2 + z^2$ den Werth $u = \sqrt{r^2 - r'^2}$.

Die Auflösung der Gleichung $F(x, y, z, u) = 0$ für u ergiebt die Dichtigkeit u des durch die unabhängigen Koordinaten x, y, z bestimmten Punktes. Lös't man diese Gleichung für irgend eine der anschaulichen Koordinaten x, y, z auf, z. B. für z; so erscheint die Formel in der Gestalt

$$z = f(x, y, u)$$

In dieser Form stellt sie eine anschauliche Ordinate eines anschaulichen Punktes eines anschaulichen Körpers mit Hülfe dreier unabhängigen Variabelen x, y, u dar, wovon die ersten beiden die Bedeutung anschaulicher Ordinaten, die letzte aber die Bedeutung einer nicht anschaulichen Ordinate oder einer Dichtigkeit hat; sie stellt also überhaupt einen anschaulichen Körper als Ort eines variabelen Punktes durch die Koordinaten dieses Punktes dar, was keine Formel der heutigen analytischen Geometrie leistet, indem diese Formeln nur Linien oder Flächen als Örter von Punkten darstellen.

Durch Annullirung der Dichtigkeit u in der Formel $F(x, y, z, u) = 0$ einer vierdimensionalen Grösse ergiebt sich deren Oberfläche in der Form $F(x, y, z, o) = 0$. Hierbei ist stillschweigend vorausgesetzt, dass während in der Gleichung $F(x, y, z, u) = 0$ drei Variabele unabhängig sind, in der Gleichung $F(x, y, z, o) = 0$ nur zwei Variabele unabhängig bleiben, dass also $F(x, y, z, o) = 0$ mit zwei unabhängigen Variabelen die Grenze des Körpers $F(x, y, z, o)$ mit drei unabhängigen Variabelen sei. Die Annullirung einer Ordinate u in der Gleichung einer Grösse hat dieselbe Bedeutung wie die Kombination der Gleichung $u = 0$ mit der Gleichung dieser Grösse. Die Gleichung $u = 0$ ist aber, wenn die drei Grössen x, y, z als unabhängige Variabelen gedacht werden, die Gleichung einer vierdimensionalen Grösse, nämlich derjenigen, welche den ganzen anschaulichen oder Grundraum XYZ mit der Dichtigkeit null umspannt, also der Grundraum XYZ selbst. Die arithmetische Kombination der beiden Gleichungen $F(x, y, z, u) = 0$ und $u = 0$ hat also die geometrische Bedeutung der Durchdringung oder Durchschneidung der vierdimensionalen Grösse oder des verdichteten Körpers $F(x, y, z, u) = 0$ mit dem anschaulichen, dreidimensionalen unverdichteten Raume XYZ. Demzufolge ist die anschauliche Oberfläche $F(x, y, z, o) = 0$ derjenige Ort, welchen der unverdichtete Körper $F(x, y, z, u) = 0$ mit dem unverdichteten Raume XYZ gemein hat. Nur in dieser Fläche, wo die Dichtigkeit null herrscht, findet vollständige Übereinstimmung der Grösse $F(x, y, z, u) = 0$ mit dem Raume XYZ statt.

Der anschauliche Körper, welcher von der letzteren Fläche begrenzt ist, stimmt durchaus nicht mit der vierdimensionalen Grösse $F(x, y, z, u) = 0$ überein, weil er unverdichtete Punkte enthält, für

welche überall $u = 0$ ist, während die letztere Grösse verdichtete Punkte enthält, für welche u verschiedene Werthe hat. Nur in der Anschauung stimmt jener Körper mit dieser Grösse überein, da die Dichtigkeit der Letzteren nicht anschaulich ist, und sie nur in ihren anschaulichen Bestandtheilen angeschaut werden kann.

Indem wir jetzt das allgemeine Problem der Durchdringung zweier Raumgrössen ins Auge fassen, spezialisiren wir dasselbe folgendermaassen. Zunächst betrachten wir die Durchdringung zweier Grössen von gleicher Dimensität. Zwei vierdimensionale Grössen oder zwei verdichtete Körper

$$F(x, y, z, u) = 0 \qquad F_1(x, y, z, u) = 0$$

durchdringen sich in einem dreidimensionalen Körper, dessen Grenz- oder Oberfläche sich durch Elimination der Dichtigkeit u aus diesen beiden Gleichungen in der Formel $f(x, y, z) = 0$ ergiebt.

Jeder Punkt in der Oberfläche dieses Körpers f entspricht den beiden Gleichungen der vierdimensionalen Grössen in der Weise vollkommen, dass dieser Punkt in beiden Grössen dieselben anschaulichen Koordinaten x, y, z und auch dieselbe Dichtigkeit u hat. Die im Innern desselben liegenden Punkte aber sind so beschaffen, dass sie in beiden Grössen dieselben anschaulichen Koordinaten und eine reelle, wenn auch verschiedene Dichtigkeit haben, dass sie sich also anschaulich, wenngleich nicht nach der Dichtigkeit decken.

Hiernach kann ein anschaulicher Körper, d. h. jeder Punkt eines solchen Körpers mit Hülfe zweier Gleichungen mit den vier Variabelen $x\, y, z, u$ als Durchdringung zweier vierdimensionalen Grössen dargestellt werden. Durch Elimination der Dichtigkeit u aus den Gleichungen der letzten beiden Grössen ergiebt sich die Durchdringung oder die ihnen gemeinsame Grösse nicht vollständig, sondern nur nach ihrer Anschauung, nämlich ohne die Dichtigkeit ihrer Punkte. Diese Anschauung der Durchdringungsgrösse ist ihre Projektion auf den Grundraum XYZ.

Eliminirt man nicht die Dichtigkeit u, sondern eine anschauliche Koordinate, z. B. z; so ist das Resultat $f_1(x, y, u) = 0$ eine verdichtete Fläche, deren Anschauung die in der Grundebene XY liegende ist, deren Umfangslinie der Gleichung $f_1(x, y, o) = 0$ entspricht. Diese verdichtete Fläche ist die Projektion der Durchdringungsgrösse auf die Hauptebene XYU.

Eine Elimination von y ergiebt in der Formel $f_2(x, z, u) = 0$ als Projektion auf die Ebene XZU eine verdichtete Fläche in der Ebene XZ, deren Umfang der Gleichung $f_2(x, z, o) = 0$ entspricht. Ebenso liefert eine Elimination von x in der Formel $f_3(y, z, u) = 0$ als Projektion auf die Ebene YZU eine verdichtete Fläche in der Ebene YZ, deren Umfang der Gleichung $f_3(y, z, o) = 0$ entspricht.

Der anschauliche Körper f, in welchem sich zwei vierdimensionale Grössen F und F_1 durchdringen, liegt im Allgemeinen im Innern dieser beiden Grössen und hat keinen Punkt mit ihren Oberflächen gemein. Schneiden sich die anschaulichen Oberflächen der beiden Grössen F und F_1; so liegt die ganze Durchschnittslinie dieser Oberflächen auch in dem Durchdringungskörper f und zwar in dessen Oberfläche, weil in allen Punkten jener Linie die Dichtigkeiten beider Grössen F und F_1 einander gleich und gleich null sind. Übrigens ist es möglich, dass zwei Grössen F und F_1, von welchen anschaulich die eine ganz im Innern der anderen liegt, doch keinen Durchdringungskörper f miteinander gemein haben, weil in keinem ihrer Punkte der anschauliche Ort und die Dichtigkeit sich decken.

Wenn man die Gleichungen der sich durchdringenden vierdimensionalen Grösse für u auflös't und die Werthe von u gleich setzt, stellt die Formel

$$u = \varphi(x, y, z) = \varphi_1(x, y, z)$$

die Oberfläche des anschaulichen Durchdringungskörpers und zugleich die in dieser Fläche herrschende Dichtigkeit u dar. Da für diese Fläche z eine Funktion von x und y wird, ist auch u eine solche.

Wären z. B. die beiden Grössen F und F_1 zwei mit den Radien r und r_1 um denselben Mittelpunkt beschriebene verdichtete Kugeln mit den Gleichungen

$$u = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2 - z^2} \qquad u = \sqrt{r_1^2 - x^2 - y^2 - z^2}$$

so würde die Durchdringung

$$r^2 - x^2 - y^2 - z^2 = r_1^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

also $r = r_1$ verlangen. Zwei solche Kugeln von verschiedenen Radien haben also keine Punkte miteinander gemein. Wären aber ihre Gleichungen

$$u = a\sqrt{r^2 - x^2 - y^2 - z^2} \qquad u = a_1\sqrt{r_1^2 - x^2 - y^2 - z^2}$$

so fände wirkliche Gemeinschaft oder Durchdringung in dem Körper mit der Oberfläche

$$a^2(r^2 - x^2 - y^2 - z^2) = a_1^2(r_1^2 - x^2 - y^2 - z^2)$$

oder

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{a^2 r^2 - a_1^2 r_1^2}{a^2 - a_1^2}$$

statt. Dieser Körper ist eine Kugel vom Radius $\sqrt{\frac{a^2 r^2 - a_1^2 r_1^2}{a^2 - a_1^2}}$.

Zwei dreidimensionale Grössen oder zwei Körper durchdringen sich in einer Fläche (nicht in einem Körper).

Sind die beiden Körper anschaulich, haben also ihre Oberflächen die Gleichungen

$$F(x, y, z) = 0 \qquad F_1(x, y, z) = 0$$

so ergiebt sich durch Elimination einer Ordinate wie z in der Formel $f(x,y) = 0$ eine Projektion der Umfangslinie der Durchschnittsfläche der beiden Körper auf die Ebene XY: diese Durchschnittsfläche selbst aber bleibt ganz unbestimmt. Dieses Resultat kann nur durch das Wesen der vierten Dimension verstanden werden. Die fragliche Durchschnittsfläche soll der den beiden Körpern gemeinschaftliche Theil sein, sie kann also nur durch die Identität der Punkte zweier Körper bestimmt werden: zur Konstatirung einer solchen Identität fehlt es jedoch an ausreichenden Formeln; denn die gegebenen Formeln $F(x,y,z) = 0$ und $F_1(x,y,z) = 0$ stellen keine Körper, sondern Flächen dar. Dass aber die Durchdringung dieser beiden Körper, abgesehen von der Unzulänglichkeit der Formeln zur genauen Bestimmung der Durchdringungsfläche, doch nur in einer Fläche erfolgen kann, ist ein Ergebniss der abstrakten Auffassung der Grössen, für welche die Anschauung Nichts gilt, vielmehr die höheren Dimensionen trotz ihrer Unanschaulichkeit ebenso berechtigt sind, als die anschaulichen. Unter Berücksichtigung der vierten Dimension liegt es nämlich auf der Hand, dass ein Körper, dessen Oberfläche durch die stetige Funktion $F(x,y,z) = 0$ gegeben ist, welcher also an dieser seiner anschaulichen Oberfläche die Dichtigkeit null hat, in seinen inneren Punkten unmöglich dieselbe Dichtigkeit besitzen kann, wie ein zweiter Körper, dessen Oberfläche durch eine andere Funktion $F_1(x,y,z) = 0$ gegeben ist, in den korrespondirenden Punkten besitzt: unmöglich können nämlich in zwei Funktionen

$$\varphi(x,y,z,u) = 0 \text{ und } \varphi_1(x,y,z,u) = 0,$$

welche also für u die Auflösungen $u = \psi(x,y,z)$, $u = \psi_1(x,y,z)$ geben, die Werthe der Abhängigen u für die gleichen Werthe der Unabhängigen x, y, z übereinstimmen, weil diese Übereinstimmung Identität der Funktionen ψ und ψ_1 oder φ und φ_1, also Identität der beiden sich durchdringenden Körper bedeutet.

Die Durchdringung, als partielle Identität zweier Körper in einem Körpervolum, ist also eine Täuschung des Anschauungsvermögens; sie existirt in Wahrheit nicht: vielmehr ist die Erscheinung der partiellen Deckung das Resultat der Durchdringung zweier vierdimensionalen Grössen, und auch für diese findet vollkommene Deckung nur in der Oberfläche eines Körpers statt, während im Innern desselben nur die Reellität der Dichtigkeit vorhanden ist.

Die bloss anschauliche Deckung von Raumgrössen oder die gewöhnliche geometrische Kongruenz ist durch-

aus keine Identität der in demselben Raume existirenden Grössen, sondern nur Kongruenz der Anschauungen dieser Grössen, bei welcher in jedem anschaulichen Punkte hinsichtlich der Dichtigkeit, oder allgemeiner, hinsichtlich der vierten und aller übrigen nicht anschaulichen Dimensionen die grösste Verschiedenheit herrschen kann. Was die analytische Bedingung für die anschauliche Durchdringung zweier Raumgrössen

$$\Phi(x, y, z, u) = 0 \qquad \Phi_1(x, y, z, u) = 0$$

betrifft; so besteht dieselbe darin, dass die nicht anschauliche Dimension u für Beide in den sich anschaulich deckenden Punkten reell sei, und wenn Φ und Φ_1 nicht bloss reelle, sondern positiv reelle Grössen, also solche darstellen, für welche die Dichtigkeit u einen positiv reellen Werth hat; so verlangt die anschauliche Durchdringung, dass in den sich deckenden Theilen von Φ und Φ_1 die Dichtigkeit u positiv reell sei, ohne dass ihre numerischen Werthe gleich zu sein brauchen. Giebt also die Auflösung der Gleichungen dieser Grössen für u die Formeln

$$u = F(x, y, z) \qquad u_1 = F_1(x, y, z)$$

so durchdringen sich die beiden Körper, deren anschauliche Oberflächen

$$F(x, y, z) = 0 \qquad F_1(x, y, z) = 0$$

sind, anschaulich in denjenigen Volumen, für welche

$$F(x, y, z) \text{ und } F_1(x, y, z)$$

positiv reelle Werthe haben.

In keinem Falle der anschaulichen Durchdringung zweier Körper, deren Oberflächen durch stetige Funktionen

$$F(x, y, z) = 0 \text{ und } F_1(x, y, z) = 0$$

gegeben sind, können die zusammenfallenden Punkte gleiche Dichtigkeit haben oder in den vierten Dimensionen sich decken. Diess geht aus der kurz vorher dargethanen Thatsache hervor, dass zwei verschiedene Funktionen $F(x, y, z)$ und $F_1(x, y, z)$ der drei unabhängigen Variabelen nicht gleiche Werthe u haben können.

Es ist wichtig und interessant, dass die Dichtigkeit u in einem Körper, dessen Oberfläche durch eine Funktion $F(x, y, z) = 0$ bestimmt ist, nicht konstant und demnach auch nicht gleich null sein kann, weil ein konstanter Werth von u die Formel $u = F(x, y, z)$ um eine Variabele oder um eine Dimension vermindern, also die gegebene Grösse, welche eben ein Körper sein soll, zu einer Fläche und, indem sie eine Beziehung zwischen x, y, z stiftet, die Durchdringungsgrösse zu einer Linie machen würde, was der Voraussetzung widerspricht.

Wenn hiernach anschauliche dreidimensionale Körper, deren Dichtigkeit in der That null ist, sich anschaulich in Körpervolumen durchdringen; so bedeutet Diess keine eigentliche Durchdringung von Körpern und keine eigentliche Deckung und Identität von Theilen dieser Körper, sondern eine Durchdringung von Flächen in Durchschnittslinien und eine Abschneidung von Theilen jener Flächen, welche zwischen diesen Durchschnittslinien liegen und einen rings herum geschlossenen Flächenzug bilden. Dass der von diesem Flächenzuge eingeschlossene Raum des einen Körpers ebenso gross oder derselbe ist, als der des anderen Körpers, ist allerdings wahr; aber diese Wahrheit ist nicht durch den Prozess der Durchdringung der Körper oder durch einen Nachweis der Identität der Körperpunkte konstatirt, sondern sie beruht auf dem unmittelbar aus Grundsätzen folgenden Satze, welcher lautet, dass ein ringsherum geschlossener Flächenzug einen dreidimensionalen Raum nur in einziger Weise begrenzen kann oder dass der davon begrenzte Raum der kleinste von allen ist, welche überhaupt durch jenen Zug begrenzt werden können. Denn in der That kann eine geschlossene Fläche unendlich viel Räume, nämlich verdichtete oder vierdimensionale Räume begrenzen, welche verschiedene Quantität oder Masse haben, aber nur einen einzigen, welcher keine Dichtigkeit hat und der dreidimensionale ist. Für den dreidimensionalen Raum der beiden sich durchdringenden Körper und den an der Durchdringungsstelle liegenden gemeinschaftlichen dreidimensionalen Raum sind die Gleichungen der Oberflächen ohne alle Bedeutung; eine Gleichung wie $F(x,y,z)=0$ stellt eine Fläche, nicht einen Körper dar; sie enthält gar keine Beziehung zwischen den Punkten dieser Fläche und den Punkten des Körpers, von welchem sie die Oberfläche ist. Die anschauliche Durchdringung der beiden Körper, deren Oberflächen durch die beiden Gleichungen $F(x,y,z)=0$ und $F_1(x,y,z)=0$ dargestellt sind, in einem Körpervolum ignorirt jede gesetzliche Beziehung oder jede Funktion zwischen den Punkten jener Oberflächen und den Punkten der von ihnen eingeschlossenen Körper; sie beruht also nicht auf der Identität des Körpergesetzes der sich durchdringenden Körper, sondern auf dem Grundsatze, dass diese Körpertheile, wenn sie dem dreidimensionalen Raume angehören, gleiche Quantität haben müssen.

Wenn wir im Vorstehenden behauptet haben, dass weder ein Körper, dessen Punkte durch eine Gleichung $F(x,y,z,u)$ zwischen vier Variabelen x,y,z,u gegeben ist, noch ein Körper, dessen Oberfläche durch eine Gleichung $F(x,y,z)=0$ zwischen drei Variabelen x,y,z gegeben ist, eine konstante Dichtigkeit u oder die Dichtigkeit null haben könne; so folgt daraus nicht, dass überhaupt ein Körper mit konstanter oder annullirter Dichtigkeit unmöglich sei. Solche Körper sind sehr wohl möglich, nur kann zwischen ihren Punkten nicht die erwähnte gesetzliche Beziehung bestehen: ihre Punkte erscheinen vielmehr voneinander und von den Punkten der Oberflächen unabhängig.

Für einen Körper mit konstanter Dichtigkeit c giebt es nur die Bedingungsgleichung $u = c$, nicht aber die Bedingungsgleichung $F(x, y, z) = c$, in welcher x, y, z unmöglich drei unabhängige Variabelen sein können. Für den unverdichteten Grundraum XYZ ist $u = 0$ die Gleichung; kein Körper darin kann eine Gleichung von der Form $F(x, y, z) = 0$ haben.

Nachdem wir vorstehend die Unzulänglichkeit der gewöhnlichen Auffassung und Darstellung der Körper erkannt haben, ergiebt sich die prinzipielle Behandlung des Problems der Durchdringung leicht durch folgende Betrachtung.

Damit die Elemente einer Grösse in gesetzlicher Abhängigkeit, die Grösse also als ein gesetzliches Ganze, insbesondere eine Raumgrösse als ein gesetzlich gebildeter Ort von Punkten erscheine, muss in ihrer arithmetischen Funktion ausser den unabhängigen Variabelen mindestens eine abhängige Variabele vorhanden sein. Da nun im Raume eine willkürliche oder freie Bewegung nach drei Dimensionen stattfindet; so ist es undenkbar, einen bestimmten Körper als eine Funktion mit drei Variabelen darzustellen, da so viel Variabele unabhängig sein müssen und dann noch eine abhängige vorhanden sein muss. Ein Körper kann hiernach nur durch vier Variabelen oder durch die Gleichung $F(x, y, z, u) = 0$ oder, wenn für u aufgelöst wird, durch die Gleichung $u = f(x, y, z)$ dargestellt werden. Hierin spielt u die Rolle der vierten Dimension oder der Dichtigkeit, während x, y, z die drei anschaulichen Dimensionen vertreten. Zwei solche Körper $F(x, y, z, u) = 0$ und $F_1(x, y, z, u) = 0$ mit gesetzlich verdichteten Punkten durchdringen sich in einer Fläche, deren Gleichung $f(x, y, z) = 0$ sich durch Elimination von u ergiebt; nur in dieser Fläche haben beide Körper gleiche Dichtigkeit.

Diese Durchdringung mit vollkommener Deckung ist wohl zu unterscheiden von anschaulicher Durchdringung. Die Letztere fordert nicht Gleichheit, sondern nur Reellität der Dichtigkeiten der anschaulich zusammenfallenden Punkte für beide Grössen. Zur Bestimmung einer anschaulichen Durchdringung bedarf es nur der Gleichungen der Oberflächen der sich durchdringenden Körper, weil diese Oberflächen in jedem Körper Punkte mit reeller Dichtigkeit einschliessen und Punkte mit nicht reeller Dichtigkeit ausschliessen: ein Gesetz, welches die Punkte dieser Oberflächen mit den Punkten der Körper selbst in Verbindung brächte, ist nicht erforderlich.

Eine Fläche, als zweidimensionale Grösse, bedarf zu ihrer Darstellung drei Variabelen, wovon zwei unabhängig und eine abhängig ist. Zwei anschauliche Flächen $F(x, y, z) = 0$ und $F_1(x, y, z)$ durchdringen sich in einer Linie, deren Projektionen sich durch Elimination je einer Variabelen in der Form $f(x, y) = o, f_1(x, z) = o, f_2(y, z) = 0$ ergeben. Die anschauliche Durchdringung zweier Flächen kann auch in Flächen erfolgen: zwei Flächenfiguren derselben Ebene durchdringen sich anschaulich in einer Fläche. Diese anschauliche Durchdringung der Flächen ist jedoch keine gesetzlich konstatirte Identität der sich decken-

den Theile, sondern beruht nur auf der Voraussetzung der Reellität der Dichtigkeiten der zusammenfallenden Punkte.

Eine verdichtete Fläche ist nur in der Anschauung eine Fläche, in Wahrheit aber eine dreidimensionale Grösse. Eine solche Fläche bestimmt sich durch vier Variabelen x, y, z, u, wovon zwei unabhängig und zwei abhängig sind. Eine solche Fläche erfordert also zwei Gleichungen, welche in der Form $z = f(x,y)$, $u = f,(x,y)$, aber auch in der Form

$$F(x,y,z,u) = 0 \qquad F_1(x,y,z,u) = 0$$

gegeben sein können, indem sie in der letzteren Form die verdichtete Fläche als die Durchdringung zweier verdichteten Körper darstellen.

Eine verdichtete Fläche durchdringt eine anschauliche Fläche $z = f_2(x, y)$ in einer Linie, deren Projektionen durch die Elimination einer Variabelen aus den beiden Gleichungen $z = f(x, y)$ und $z = f_2(x, y)$ gewonnen werden. Eine verdichtete Fläche durchdringt eine andere verdichtete Fläche $z = f_2(x, y)$, $u = f_3(x, y)$ in einem Punkte, indem die vier Variabelen durch die vier gegebenen Gleichungen bestimmte Werthe annehmen. In der That wird es in zwei verdichteten Flächen nur einen Punkt geben, in welchem die anschaulichen Koordinaten und die Dichtigkeit übereinstimmen. Ein verdichteter Körper $F_4(x, y, z, u) = 0$ wird von einer verdichteten Fläche in einer Linie durchdrungen.

Eine Linie, als eindimensionale Grösse, bedarf zu ihrer Darstellung drei Variabelen, wovon eine unabhängig und zwei abhängig sind. Zwei anschauliche Linien $y = f(x)$, $z = f_1(x)$ und $y = f_2(x)$, $z = f_3(x)$ durchdringen sich anschaulich in einem Punkte, wenn sie sich überhaupt durchdringen, was im Allgemeinen nicht statt findet. Eine verdichtete Linie erscheint nur in der Anschauung als Linie, in Wahrheit ist sie eine zweidimensionale Grösse, welche durch vier Variabelen x, y, z, u bestimmt ist, wovon eine unabhängig und drei abhängig sind. Da man für jede solche Linie drei Gleichungen $y = f(x)$, $z = f_1(x)$, $u = f_2(x)$ hat; so leuchtet ein, dass zwei verdichtete Linien nur ausnahmsweise identische Punkte haben, auch dass, wenn sie sich anschaulich treffen, in dem Durchschnittspunkte durchaus nicht immer eine wirkliche Übereinstimmung stattfindet. Das streckenweise Zusammenfallen zweier Linien ist nur anschauliche, nicht wirkliche Durchdringung.

Aus allem Vorstehenden geht hervor, dass zwei n-dimensionale Grössen nur in einer $(n-1)$-dimensionalen Grösse identisch sein können und dass eine Durchdringung in einer n-dimensionalen Grösse nur anschauliches, auf Reellität, nicht auf Gleichheit der höheren Dimensionen begründetes Zusammentreffen ist. Geometrische Kongruenz bedeutet nicht ohne Weiteres Identität der sich deckenden Grössen, sondern nur anschauliches Zusammentreffen oder Zusammentreffen in derselben anschaulichen Raumgrösse. Die geometrischen Kongruenzbeweise konstatiren nicht die Identität aller Punkte zweier Grössen, sondern die Übereins-

stimmung ihrer Grenzen. Um die Kongruenz zweier Körper darzuthun, zeigt man die Übereinstimmung ihrer Oberflächen; um die Kongruenz zweier Flächen darzuthun, zeigt man die Übereinstimmung ihrer Umfangslinien; um die Kongruenz zweier Linien darzuthun, zeigt man die Übereinstimmung ihrer Endpunkte. Der Beweis für die Kongruenz zweier Grössen, von welcher Dimensität sie auch sein mögen, läuft also auf den Nachweis der Übereinstimmung von Eckpunkten hinaus, und der Schluss auf die quantitative Gleichheit der durch diese Punkte bestimmten Grössen ist nur möglich durch Hinzufügung der Sätze, dass zwei Punkte nur eine gerade Linie, drei Punkte (oder drei gerade Linien) nur eine ebene Fläche, vier Punkte (oder vier ebene Flächen) nur einen einförmigen Körper einschliessen. Hierbei bleibt immer noch möglich, dass die in der Anschauung kongruenten Grössen ganz verschiedene vierdimensionale Grössen sind oder ganz verschiedene Dichtigkeit in den einzelnen Punkten, mithin ganz verschiedene Massen oder Quantitäten haben.

§. 16.

Körperliche Richtung.

Die Linie, welche durch die Gleichungen $u = cx$, $y = 0$, $z = 0$ gegeben ist, liegt anschaulich in der Grundaxe OX, hat aber variabele Dichtigkeit. In Wahrheit liegt sie in der Ebene XU und neigt sich gegen die Axe OX unter dem nicht anschaulichen Winkel α, für welchen $tang\ \alpha = c$ ist. Da der Winkel α nicht anschaulich ist, verdient die Grösse α auch nicht den Namen eines eigentlichen Winkels und die Abweichung der Linie $u = cx$ von der reellen Axe OX nicht den Namen einer eigentlichen Richtungsverschiedenheit: besser wird $c = \frac{u}{x}$ als das Verhältniss der mit der anschaulichen Länge x gleichmässig wachsenden Dichtigkeit u, die Linie selbst also als eine verdichtete Linie mit gleichmässig zunehmender Dichtigkeit aufgefasst. Da die vollständigere Formel dieser Linie

$$(r) = x + u\, ii_1\, i_2 = x + cx\, ii_1\, i_2$$

ist; so hat ihre Quantität den Werth

$$r = \sqrt{x^2 + u^2} = x\sqrt{1 + c^2}$$

Diese Quantität ist keine anschauliche Länge, also überhanpt keine Länge, sondern eine Masse.

Die allgemeinere, durch den Nullpunkt gehende Linie, welche durch die Formel

$$(r) = x + axi + bxii_1 + cxii_1\, i_2$$

oder durch die Gleichungen

$$y = a\,x, \quad z = b\,x, \quad u = c\,x$$

gegeben ist, liegt anschaulich in der durch die beiden Gleichungen

$$y = a\,x, \quad z = b\,x$$

bestimmten Linie des Raumes; vermöge der vierten Dimension u hat sie jedoch in dem vierdimensionalen Raume $ZYXU$ eine besondere Richtung. Ist Q ein Punkt dieser Linie, welcher von dem anschaulichen Punkte P verhüllt wird; so sind x, y, z, u die Projektionen der Linie OQ oder der Masse $r = OQ$ auf die vier Axen OX, OY, OZ, OU [die Quantitäten des primären, sekundären, tertiären und quartären Theiles von (r)], man hat also

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + u^2} = x\sqrt{1 + a^2 + b^2 + c^2}$$

Bezeichnet man die nicht anschaulichen Winkel der Richtung der Linie OQ mit den vier Axen OX, OY, OZ, OU mit δ, γ, β, α, so bestimmt sich die Richtung der Linie OQ durch die Formeln

$$\cos\delta = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2 + b^2 + c^2}}, \quad \cos\gamma = \frac{a}{\sqrt{1 + a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$\cos\beta = \frac{b}{\sqrt{1 + a^2 + b^2 + c^2}}, \quad \cos\alpha = \frac{c}{\sqrt{1 + a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Zwichen den Winkeln α, β, γ, δ besteht die Beziehung

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + \cos^2\delta = 1$$

Wenn man in allen vorstehenden Formeln die vierte Dimension u gleich null, also $c = 0$ setzt, erhält man die Neigungsverhältnisse der anschaulichen Linie, welche die verdichtete Linie verhüllt. Für verdichtete Linien hat die Grösse c allerdings einen reellen Werth: allein sie bezieht sich immer auf eine vierte Dimension oder Dichtigkeit. Demzufolge giebt es keine anschauliche Linie, welche den vorstehenden Formeln für δ, γ, β, α entspricht; es ist unmöglich, dass eine auschauliche Linie sich unter den drei Winkeln δ, β, γ gegen die drei anschaulichen Axen OX, OY, OZ neigen könnte, solange c einen von null verschiedenen Werth hat. Alle verdichteten Linien liegen verhüllt in derjenigen anschaulichen Linie, für welche $c = 0$ ist.

Wir bemerken noch, dass während x, y, z, u die Projektionen eines Vektors (r) auf die vier Axen OX, OY, OZ, OU sind, die Projektionen desselben auf die sechs Ebenen XY, YZ, ZX, XU, YU, ZU die Werthe $\sqrt{x^2 + y^2}$, $\sqrt{y^2 + z^2}$, $\sqrt{z^2 + x^2}$, $\sqrt{x^2 + u^2}$, $\sqrt{y^2 + u^2}$, $\sqrt{z^2 + u^2}$ haben, dass man als Projektionen auf die vier Räume ZYX, YXU, XUZ, UZY die Grössen

$$\sqrt{z^2 + y^2 + x^2}, \sqrt{y^2 + x^2 + u^2}, \sqrt{x^2 + u^2 + z^2}, \sqrt{u^2 + z^2 + y^2}$$

anzusehen hat und dass $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + u^2}$ als die Projektion

auf den vierdimensionalen Raum $XYZU$ erscheint. Vermittelst dieser Formeln lassen sich, wenn alle linearen, oder alle superfiziellen, oder alle körperlichen Projektionen gegeben sind, die nicht gegebenen leicht bestimmen.

Bezeichnet man die Projektionen des Vektors (r) auf die oben gedachten sechs Ebenen mit $r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6$; so hat man

$$r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r_4^2 + r_5^2 + r_6^2 = 3\,(x^2 + y^2 + z^2 + u^2) = 3\,r^2$$

also

$$r = \sqrt{\tfrac{1}{3}\,(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r_4^2 + r_5^2 + r_6^2)}$$

Sind $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6$ die Neigungswinkel des Vektors gegen jene Ebenen; so ist

$$\cos\alpha_1 = \frac{r_1}{r} \qquad \cos\alpha_2 = \frac{r_2}{r} \qquad \cos\alpha_3 = \frac{r_3}{r}$$

$$\cos\alpha_4 = \frac{r_4}{r} \qquad \cos\alpha_5 = \frac{r_5}{r} \qquad \cos\alpha_6 = \frac{r_6}{r}$$

und

$$\cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2 + \cos^2\alpha_3 + \cos^2\alpha_4 + \cos^2\alpha_5 + \cos^2\alpha_6 = 3$$

Bezeichnet man die Projektionen des Vektors (r) auf die zuletzt gedachten vier Räume mit R_1, R_2, R_3, R_4; so hat man

$$R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 + R_4^2 = 3\,(x^2 + y^2 + z^2 + u^2) = 3\,r^2$$

also

$$r = \sqrt{\tfrac{1}{3}\,(R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 + R_4^2)}$$

Sind $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1$ die Neigungswinkel des Vektors (r) gegen diese vier Räume; so ist

$$\cos\alpha_1 = \frac{R_1}{r} \qquad \cos\beta_1 = \frac{R_2}{r} \qquad \cos\gamma_1 = \frac{R_3}{r} \qquad \cos\delta_1 = \frac{R_4}{r}$$

und

$$\cos^2\alpha_1 + \cos^2\beta_1 + \cos^2\gamma_1 + \cos^2\delta_1 = 3$$

Offenbar ist $\sin^2\alpha_1 = \dfrac{r^2 - R_1^2}{r^2} = \dfrac{u^2}{x^2 + y^2 + z^2 + u^2} = \cos^2\alpha,$

mithin $\alpha_1 = \dfrac{\pi}{2} - \alpha,\ \beta_1 = \dfrac{\pi}{2} - \beta,\ \gamma_1 = \dfrac{\pi}{2} - \gamma,\ \delta_1 = \dfrac{\pi}{2} - \delta.$

Hiernach ergänzen sich die Winkel $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, welche eine Linie gegen die vier Axen OU, OZ, OY, OX bildet, mit den Winkeln $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1$, welche sie gegen die vier Räume ZYX, YXU, XUZ, UZY bildet, paarweise zu einem rechten.

Die in einer anschaulichen Ebene gleichmässig verdichtete Fläche hat die Formel

$$(r) = x + yi + (ax + by)\,ii_1 + (cx + dy)\,ii_1i_2$$

Die anschauliche Ebene, welche die verdichtete Fläche verhüllt, ist $(r) = x + yi + (ax + by)\,ii_1$ oder man hat dafür nach der Dar-

stellungsweise der analytischen Geometrie $z = ax + by$. Die Dichtigkeit in irgend einem anschaulichen Punkte dieser Fläche ist $u = cx + dy$.

Die Grössen x, y, z, u, sowie auch r stellen jetzt immer lineare Grössen dar; x, y, z, u sind also die Projektionen des Linienvektors $r = OQ$. Nach der Beschaffenheit der gegebenen Fläche liegt dieser Vektor mit allen seinen gegebenen Punkten ganz und vollständig in der verdichteten Fläche; er macht eine Linie derselben aus, weil jede verhältnissmässige gleiche Verkleinerung von x und y, d. h. die Substitution $x' = nx$, $y' = ny$ eine gleiche Verkleinerung von z auf $z' = nz$, von u auf $u' = nu$ und von r auf $r' = nr$ ergiebt.

Fassen wir ausser dem in der Fläche liegenden Nullpunkte O noch zwei Punkte Q_1 und Q_2 derselben ins Auge und bestimmen wir das von diesen drei Punkten eingeschlossene Dreieck OQ_1Q_2, dessen Flächeninhalt $= R$ sei. Zu dem Ende ermitteln wir die vier Projektionen dieser Dreiecksfläche auf die vier Räume ZYX, YXU, XUZ, UZY, indem wir die Flächeninhalte dieser vier Projektionen mit A, B, C, D bezeichnen. Die Projektion eines Vektors $(r) = x + yi + zii_1 + uii_1i_2$ auf den Raum ZYX ist diejenige Grösse, welche dieser Vektor mit dem durch die Gleichung $u = 0$ bestimmten Raume gemein hat, also das aus seinem primären, sekundären und tertiären Theile bestehende Stück $x + yi + zii_1$, dessen Länge $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ist; der Endpunkt des letzteren Linienstückes stellt die Projektion des Endpunktes Q des Vektors OQ auf den Raum ZYX dar. Indem sich die beiden Punkte Q_1 und Q_2 in den Punkten M_1 und M_2 auf den letzteren Raum projiziren, ist die Dreiecksfläche $OM_1M_2 = A$ die Projektion der Fläche $OQ_1Q_2 = R$ auf denselben primären Raum.

Wenn x_1, y_1, z_1, u_1 die Koordinaten des Punktes Q_1 und x_2, y_2, z_2, u_2 die des Punktes Q_2 sind; so bestimmen x_1, y_1, z_1 den Punkt M_1 und x_2, y_2, z_2 den Punkt M_2. Das Dreieck $OM_1M_2 = A$ liegt im Raume ZYX und bestimmt sich aus seinen Projektionen auf die drei Ebenen XY, YZ, XZ. Jede dieser Projektionen ist ein Dreieck und zwar die erste ein Dreieck $O\,M_1'\,M_2'$, wovon der Punkt M_1' die Koordinaten x_1, y_1 und der Punkt M_2' die Koordinaten x_2, y_2, welches also den Inhalt $A' = \frac{1}{2}(x_1\,y_2 - x_2\,y_1)$ hat. In ähnlicher Weise ergiebt sich für die Projektion auf die Ebene YZ der Inhalt $A'' = \frac{1}{2}(y_1\,z_2 - y_2\,z_1)$ und für die Projektion auf die Ebene XZ der Inhalt $A''' = \frac{1}{2}(x_1\,z_2 - x_2\,z_1)$.

Hiernach ist

$$A = \sqrt{A'^2 + A''^2 + A'''^2}$$

$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{(x_1\,y_2 - x_2\,y_1)^2 + (y_1\,z_2 - y_2\,z_1)^2 + (x_1\,z_2 - x_2\,z_1)^2}$$

Ganz ebenso findet sich für die Projektionen B, C, D auf die Räume YXU, XUZ, UZY

$$B = \tfrac{1}{2}\sqrt{(x_1\,y_2 - x_2\,y_1)^2 + (y_1\,u_2 - y_2\,u_1)^2 + (x_1\,u_2 - x_2\,u_1)^2}$$

$$C = \tfrac{1}{2}\sqrt{(x_1 z_2 - x_2 z_1)^2 + (x_1 u_2 - x_2 u_1)^2 + (z_1 u_2 - z_2 u_1)^2}$$
$$D = \tfrac{1}{2}\sqrt{(y_1 z_2 - y_2 z_1)^2 + (y_1 u_2 - y_2 u_1)^2 + (z_1 u_2 - z_2 u_1)^2}$$

Aus den vier Projektionen A, B, C, D der Grösse R auf die vier neutralen Räume ergiebt sich der Werth von R nach der Formel

$$A^2 + B^2 + C^2 + D^2 = n R^2$$

Da für eine vollkommen anschauliche Fläche oder für $u = 0$ offenbar $A = R$ ist; so ergiebt sich, dass $n = 2$ sein muss, dass man also hat

$$R = \sqrt{\tfrac{1}{2}(A^2 + B^2 + C^2 + D^2)}$$

$$R = \tfrac{1}{2}\sqrt{\{(x_1 y_2 - x_2 y_1)^2 + (y_1 z_2 - y_2 z_1)^2 + (x_1 z_2 - x_2 z_1)^2 + (x_1 u_2 - x_2 u_1)^2 + (y_1 u_2 - y_2 u_1)^2 + (z_1 u_2 - z_2 u_1)^2\}}$$

Bezeichnen α, β, γ, δ die Neigungswinkel der gegebenen Fläche gegen die Räume ZYX, YXU, XUZ, UZY oder sind $\frac{\pi}{2} - \alpha, \frac{\pi}{2} - \beta$, $\frac{\pi}{2} - \gamma, \frac{\pi}{2} - \delta$ die Neigungswinkel der gegebenen Fläche gegen die Axen OU, OZ, OY, OX; so hat man

$$\cos\alpha = \frac{A}{R} \quad \cos\beta = \frac{B}{R} \quad \cos\gamma = \frac{C}{R} \quad \cos\delta = \frac{D}{R}$$

mithin

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + \cos^2\delta = 2$$

In diesen Formeln ist

$$z_1 = a x_1 + b y_1 \qquad u_1 = c x_1 + d y_1$$
$$z_2 = a x_2 + b y_2 \qquad u_2 = c x_2 + d y_2$$

zu substituiren. Hierdurch wird

$$A = \tfrac{1}{2}(x_1 y_2 - x_2 y_1)\sqrt{1 + a^2 + b^2}$$
$$B = \tfrac{1}{2}(x_1 y_2 - x_2 y_1)\sqrt{1 + c^2 + d^2}$$
$$C = \tfrac{1}{2}(x_1 y_2 - x_2 y_1)\sqrt{b^2 + d^2 + (a d - b c)^2}$$
$$D = \tfrac{1}{2}(x_1 y_2 - x_2 y_1)\sqrt{a^2 + c^2 + (a d - b c)^2}$$

also

$$R = \tfrac{1}{2}(x_1 y_2 - x_2 y_1)\sqrt{1 + a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + (a d - b c)^2}$$

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{1 + a^2 + b^2}}{\sqrt{1 + a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + (a d - b c)^2}}$$

$$\cos\beta = \frac{\sqrt{1 + c^2 + d^2}}{\sqrt{1 + a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + (a d - b c)^2}}$$

$$\cos\gamma = \frac{\sqrt{b^2 + d^2 + (ad - bc)^2}}{\sqrt{1 + a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + (ad - bc)^2}}$$

$$\cos\delta = \frac{\sqrt{a^2 + c^2 + (ad - bc)^2}}{\sqrt{1 + a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + (ad - bc)^2}}$$

Wenn α_1, β_1, γ_1, δ_1 die Winkel sind, unter welchen sich die gegebene Fläche gegen die vier Axen OU, OZ, OY, OX neigt; so hat man

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{2} - \alpha, \quad \beta_1 = \frac{\pi}{2} - \beta, \quad \gamma_1 = \frac{\pi}{2} - \gamma, \quad \delta_1 = \frac{\pi}{2} - \delta,$$

also

$$\cos^2\alpha_1 + \cos^2\beta_1 + \cos^2\gamma_1 + \cos^2\delta_1 = 2$$

Die vorstehenden Richtungen und Winkel liegen verhüllt in denjenigen anschaulichen Richtungen und Winkeln, welche sich aus den vorstehenden Formeln ergeben, wenn man darin u, u_1, u_2; also auch c und d gleich null setzt. Dadurch wird

$$\cos\alpha = 1 \quad \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2 + b^2 + c^2}} \quad \cos\gamma = \frac{b}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}}$$

$$\cos\delta = \frac{c}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}}$$

Der Neigungswinkel α gegen den Raum XYZ wird hierdurch gleich null und die Winkel β, γ, δ bezeichnen die Neigungen gegen die Ebenen XY, XZ, YZ.

Der in einem anschaulichen Raume gleichmässig verdichtete, durch den Nullpunkt gehende Körper hat die Formel

$$(r) = x + yi + zii_1 + (ax + by + cz)\, ii_1 i_2$$

Der anschauliche Körper, welcher diesen verdichteten Körper verhüllt, ist $(r) = x + yi + zii_1$, also, da x, y, z unabhängige Variabelen sind, ein Stück des dreidimensionalen Raumes.

Die Gleichung des Körpers, welcher zwar anschaulich durch den Nullpunkt O geht, aber hier nicht die Dichtigkeit null hat, ist

$$(r) = x + yi + zii_1 + (n + ax + by + cz)\, ii_1 i_2$$

Der letztere Körper hat mit jeder der vier Axen OX, OY, OZ, OU einen Punkt A, B, C, D gemein. Für den Punkt A ist $y = 0$, $z = 0$, $u = 0$, also $OA = x = -\frac{n}{a}$. Für den Punkt B ist $x = 0$, $z = 0$, $u = 0$, also $OB = y = -\frac{n}{b}$. Für den Punkt C ist $x = 0$, $y = 0$, $u = 0$, also $OC = z = -\frac{n}{c}$. Für den Punkt D ist $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, also $OD = u = n$.

Die vier Punkte A, B, C, D bestimmen ein Tetraeder, dessen Projektionen auf die Räume ZYX, YXU, XUZ, UZY die rechtwinkligen Tetraeder $OCBA$, $OBAD$, $OADC$, $ODCB$ sind. Die Inhalte der letzten vier Tetraeder sind

$$OCBA = \tfrac{1}{6}\, zyx = -\tfrac{1}{6}\,\frac{n^3}{abc}$$

$$OBAD = \tfrac{1}{6}\, yxu = \tfrac{1}{6}\,\frac{n^3}{ab}$$

$$OADC = \tfrac{1}{6}\, xuz = \tfrac{1}{6}\,\frac{n^3}{ac}$$

$$ODCB = \tfrac{1}{6}\, uzy = \tfrac{1}{6}\,\frac{n^3}{bc}$$

und hieraus ergiebt sich der Inhalt R des Tetraeders $ABCD$, dessen Quadrat die Summe der Quadrate dieser Projektionen ist,

$$R = \frac{n^3}{6abc}\sqrt{1 + a^2 + b^2 + c^2}$$

Sind δ, γ, β, α die Neigungswinkel des gegebenen Körpers gegen die Räume ZYX, YXU, XUZ, UZY; so hat man

$$\cos\delta = \frac{-1}{\sqrt{1 + a^2 + b^2 + c^2}} \qquad \cos\gamma = \frac{c}{\sqrt{1 + a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$\cos\beta = \frac{b}{\sqrt{1 + a^2 + b^2 + c^2}} \qquad \cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{1 + a^2 + b^2 + c^2}}$$

Auch jetzt ist

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + \cos^2\delta = 1$$

Wenn sich der gegebene Körper unter den Winkeln α_1, β_1, γ_1, δ_1 gegen die vier Axen OX, OY, OZ, OU neigt; so hat man $\alpha_1 = \frac{\pi}{2} - \alpha$, $\beta_1 = \frac{\pi}{2} - \beta$, $\gamma_1 = \frac{\pi}{2} - \gamma$, $\delta_1 = \frac{\pi}{2} - \delta$, folglich

$$\cos^2\alpha_1 + \cos^2\beta_1 + \cos^2\gamma_1 + \cos^2\delta_1 = 3$$

Was die Anschauung der Winkel α, β, γ, δ betrifft; so hat man zu erwägen, dass die vierte Dimension u nicht anschaulich ist, dass also die Anschauungen der gedachten Grössen erhalten werden, wenn man $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$, $n = o$ setzt. Für die Anschauung sind also die drei Winkel α, β, γ rechte und der Winkel δ ist für einen Körper, der im Nullpunkte O oder für $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ positive Dichtigkeit n hat, gleich 180^0, und für einen Körper, der hier negative Dichtigkeit hat, gleich null.

Mit den Mitteln der heutigen analytischen Geometrie können nur Punkte, Linien und Flächen dargestellt werden. Die damit dar-

gestellten Linien und Flächen werden nach ihren Richtungen gegen Linien und Flächen, insbesondere gegen die drei Axen OX, OY, OZ und gegen die drei Ebenen YZ, ZX, XY bestimmt und hierbei ergiebt sich das Gesetz, dass sich die Neigungswinkel, welche eine Grösse (eine Linie oder Fläche) gegen die ersteren Axen bildet, mit den Winkeln, welche sie gegen die letzteren Ebenen bildet, paarweise zu rechten ergänzen.

Zur Darstellung von Körpern reicht die jetzige analytische Geometrie nicht aus; es ist hierzu unbedingt die vierte Dimension erforderlich. Körper bewegen sich nicht im drei-, sondern im vierdimensionalen Raume. In diesem Raume befolgen aber alle Grössen, die Punkte, die Linien, die Flächen und die Körper, höhere oder allgemeinere Gesetze; ihre Richtungen kommen als körperliche Richtungen in Betracht, und es kommen einmal die Richtungen gegen die vier Axen OX, OY, OZ, OU, gegen die sechs Ebenen YZ, ZX, XY, ZU, YU, XU und gegen die vier Räume YZU, ZUX, UXY, XYZ in Betracht. Die Neigungen gegen die sechs Ebenen spielen jetzt keine so wichtige Rolle, wie im dreidimensionalen Raume; vielmehr nehmen vornehmlich die Neigungen gegen die vier Axen und die vier Räume die Aufmerksamkeit in Anspruch. Für diese ergiebt sich das Gesetz, dass sich die Neigungswinkel, welche eine Grösse (sei es eine Linie, eine Fläche oder ein Körper) gegen die vier **Axen** bildet, mit den Winkeln, welche sie gegen die vier **Räume** bildet, paarweise zu rechten ergänzen.

Sind für irgend eine Grösse α, β, γ, δ die Neigungswinkel gegen die vier Axen und α_1, β_1, γ_1, δ_1 die Neigungswinkel gegen die vier Räume; so ist immer

$$(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma+\cos^2\delta)+(\cos^2\alpha_1+\cos^2\beta_1+\cos^2\gamma_1+\cos^2\delta_1)=4$$

während für die Grössen im dreidimensionalen Raume

$$(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)+(\cos^2\alpha_1+\cos^2\beta_1+\cos^2\gamma_1)=3$$

für die Grössen im zweidimensionalen Raume

$$(\cos^2\alpha+\cos^2\beta)+(\cos^2\alpha_1+\cos^2\beta_1)=2$$

und für die Grössen im eindimensionalen Raume

$$\cos^2\alpha+\cos^2\alpha_1=1$$

ist.

Das vorstehende Gesetz führt zur Erkenntniss der Normalen einer Grösse, welche wir dahin definiren, dass sie eine Grösse sei, deren Dimensionenzahl sich mit der Dimensionenzahl der gegebenen Grösse zur Zahl 4 ergänze, dass also die Normale einer Linie ein Körper, die Normale einer Fläche eine Fläche, die Normale eines Körpers eine Linie und zwar diejenige sei, welche sich gegen die Axen OX, OY, OZ, OU unter denselben Winkeln

neigt, unter welchen sich die gegebene Grösse gegen die Räume YZU, ZUX, UXY, XYZ neigt, oder auch diejenige, welche sich gegen die letzteren Räume unter denselben Winkeln neigt, unter welchen sich die gegebene Grösse gegen die ersteren Axen neigt.

So neigt sich die Normale des zuletzt betrachteten Körpers, welche eine Linie ist, gegen die eben genannten Axen unter den Winkeln α, β, γ, δ; ihre Gleichung ist mithin

$$(r) = r \cos \alpha + r \cos \beta . i + r \cos \gamma . i i_1 + r \cos \delta . i i_1 i_2$$

Wir heben hervor, dass die Normale eines Körpers in einer anschaulichen Linie verhüllt liegt, für welche α, β, γ rechte Winkel sind und $\delta = 0$ ist, also in einer Linie, welche mit der vierten Axe OU zusammenfällt, oder welche sich, da diese Axe im Nullpunkte O verhüllt liegt, in dem Nullpunkte verhüllt. Die Normale des Körpers kann daher überall nicht als Linie, sondern nur als Punkt angeschaut werden.

Wenn man den vorstehenden Begriff der Normalen auf die Grössen des dreidimensionalen Gebietes, also auf Linien und Flächen überträgt; so ist die Normale einer Linie eine Fläche und die Normale einer Fläche eine Linie. Diese Normalen haben eine vollkommen bestimmte Richtung, nicht aber diejenigen Grössen, welche man eine Normallinie auf einer Linie und eine Normalebene auf einer Fläche nennt, indem diese Grössen den Bedingungen der Normalität oder Neutralität nicht vollständig genügen. Im vierdimensionalen Raume, wo Linien, Flächen und Körper in Betracht kommen, hat die Normale auf jeder dieser Grössen ebenfalls eine vollkommen bestimmte Richtung und es ist beachtenswerth, dass auch die Normale einer Fläche, obwohl sie eine Ebene ist, doch eine einzige fest bestimmte Richtung hat, wogegen die Normallinie und die Normalebene auf einer Linie, die Normallinie und der Normalkörper auf einer Fläche, der Normalkörper und die Normalfläche auf einem Körper dieselbe Unbestimmtheit zeigen, wie im dreidimensionalen Raume die Normallinie auf einer Linie und die Normalebene auf einer Fläche.

§. 17.

Drehung, Wälzung und Wendung in den verschiedenen Dimensitätsgebieten.

Nachdem wir zu den in §. 4 erörterten abstrakten Prinzipien der Multiplikation die Anschauungen in den verschiedenen Dimensitätsgebieten gewonnen haben, rekapituliren wir zunächst folgende allgemeinen Sätze.

Verhältniss ist die dritte Grundeigenschaft. Im engeren Sinne bedeutet Verhältniss das primäre oder numerische Verhältniss, Richtung dagegen bezeichnet eine höhere Neutralitätsstufe des Verhältnisses und zwar ist Deklinationsrichtung soviel wie sekundäres Verhältniss, Inklinationsrichtung soviel wie tertiäres Verhältniss, Reklinationsrichtung soviel wie quartäres Verhältniss.

Verhältnissänderung ist der dritte Grundprozess, Zusammensetzung der Verhältnisse oder Multiplikation die dritte Grundoperation. Die vier ersten Neutralitätsstufen dieses Grundprozesses tragen besondere Namen: primäre Verhältnissänderung ist Vervielfachung oder absolute Multiplikation, sekundäre Verhältnissänderung ist Deklination oder Drehung, tertiäre Verhältnissänderung ist Inklination oder Wälzung, quartäre Verhältnissänderung ist Reklination oder Wendung. Jeder dieser Prozesse kann auf Punkte, auf Linien, auf Flächen und auf Körper angewandt werden, und erhält dadurch eine andere Qualität oder Dimensität, d. h. man erhält dadurch die primogene, die sekundogene, die tertiogene und die quartogene Multiplikation. Nach ihrem Grundwesen ist die Verhältnissänderung der Punkte eine absolute Vervielfältigung, die der Linien eine Drehung um einen Punkt, die der Flächen eine Wälzung um eine Axe, die der Körper eine Wendung oder Verdichtung gegen eine Ebene. Drehungen um Punkte und Wälzungen um Axen sind keine körperlichen Prozesse: wenn sie an Körpern vollzogen werden; so werden die Körper nicht als dreidimensionale Grössen, sondern als Örter von Linien oder Flächen aufgefasst.

Deklination ist Drehung um die Nullgrenze. Für Linien ist diese Grenze ein Punkt (der Null- oder Grundpunkt O), für Flächen eine Linie (die Null- oder Grundaxe OX), für Körper eine Ebene (die Null- oder Grundebene XY). Demnach dreht sich bei der Deklination eine Linie um den Grundpunkt O, eine Fläche um die Grundaxe OX, ein Körper um die Grundebene XY (welcher letztere Prozess als Kompression gegen diese Ebene erscheint, da er die Konstanz der Nullgrenze fordert). Wird durch andere Operationen die Deklinationsaxe in eine andere Richtung gebracht; so erfolgt die Deklination um die neue Axe: diese Axe wird von der Inklination und Reklination mitgenommen.

Inklination ist Wälzung um sich selbst, also für eine Linie Wälzung in einer Linie OX, für eine Fläche Wälzung in einer Ebene XY, für einen Körper Wälzung in einem Raume XYZ. Die Wälzung läuft auf eine Rotation unter konstantem Verhältnisse gegen die Normale hinaus. Die Normale einer Linie ist eine Ebene, die einer Fläche ist eine Linie, die eines Körpers ein Punkt (da nur ein Punkt auf allen Dimensionen eines Körpers normal stehen kann). Demzufolge erscheint die Inklination einer Linie als Rotation unter konstantem Verhältnisse zur Normalebene YZ oder um die Grundaxe OX, Inklination einer Fläche als Rotation unter konstantem Verhältnisse zur Normallinie OZ oder um die Axe OZ, Inklination eines Körpers als Rotation unter

konstantem Verhältnisse zum Normalpunkte O oder um den Punkt O (nach beliebiger Seite). Wird die Inklinationsaxe in eine andere Richtung gebracht; so erfolgt die Inklination um die neue Axe: diese Axe wird von der Reklination, aber nicht von der Deklination mitgenommen.

Reklination ist Wendung gegen das nächst höhere Dimensitätsgebiet, von welchem eine Grösse der gegebenen Art die Nullgrenze ist. Ein solches Gebiet ist für Linien eine Fläche, für Flächen ein Körper, für Körper das vierdimensionale Gebiet. Demgemäss ist Reklination der Linien Wendung gegen die Grundebene XY oder Kontraktion in der Richtung OZ, ohne Inhaltsänderung in den Richtungen OX und OY; Reklination der Flächen ist Wendung gegen den Grundraum XYZ oder Kontraktion in der Ebene YZ, ohne Inhaltsänderung in den Ebenen XY und XZ, also Kontraktion in den Richtungen OY und OZ bei gleichzeitiger Expansion in der Richtung OX; Reklination der Körper ist Wendung gegen das vierdimensionale Grundgebiet $XYZU$ oder Kontraktion in dem Raume XUZ, ohne Inhaltsänderung in den Räumen ZYX und YXU, also Kontraktion in der Richtung OX, Expansion in der Richtung OY, Konstanz in der Richtung OZ. Wird durch andere Operationen die Reklinationsaxe in eine andere Richtung gebracht; so erfolgt die Reklination um die neue Axe: diese Axe wird weder von der Deklination, noch von der Inklination mitgenommen.

In der Reihenfolge der Neutralitätsstufen der Verhältnissoperationen ist primäre Deklination sekundäre Vervielfachung oder Einführung des Primären in das nächst höhere Dimensitätsgebiet; primäre Inklination ist sekundäre Deklination und als solche Einführung des Sekundären in das nächst höhere Dimensitätsgebiet; primäre Reklination ist sekundäre Inklination oder tertiäre Deklination und als solche Einführung des Tertiären in das nächst höhere Dimensitätsgebiet. Jeder selbstständige Multiplikationsprozess führt die multiplizirte Grösse in das nächst höhere Dimensitätsgebiet ein: die absolute Einheit wird durch numerische Multiplikation in das Gebiet der Quantitätsverhältnisse, durch Multiplikation mit einem ein-, zwei-, dreidimensionalen Faktor aber in das Gebiet der Linien, der Flächen, der Körper geführt. Die eindimensionale (reelle) Linie wird durch Deklination in das zweidimensionale Gebiet der Fläche, die deklinirte (komplexe) Linie durch Inklination in das dreidimensionale Gebiet der Körper, die deklinirte und inklinirte (triplexe) Linie durch Reklination in das vierdimensionale Gebiet geführt. Die reelle Fläche wird durch Deklination in das dreidimensionale Gebiet, der reelle Körper in das vierdimensionale Gebiet geführt.

Vervielfältigung, Drehung, Wälzung und Wendung oder Multiplikation, Deklination, Inklination und Reklination sind, als drei neutrale Verhältnissprozesse, von einander unabhängig, sie beeinflussen sich nicht und sind vertauschbar. Übrigens ist zu beachten, dass jeder dieser Prozesse die Axen der unter ihm stehenden Prozesse mit-

nimmt, die Axen der über ihm stehenden aber unverändert lässt.

Da feste Axen nur im abstrakten Begriffsgebiete, nicht im Anschauungsgebiete existiren; so kann jede Axe im Raume als Grundaxe OX angenommen werden. Erst durch Annahme eines Grundpunktes O, einer Grundaxe OX, einer Grundebene XY und eines Grundraumes XYZ (auch YZU, ZUX, UXY sind Räume, welche als Grundräume angenommen werden können) erhält eine in der Anschauung gegebene Raumgrösse eine bestimmte Richtung, in Folge dessen sie als reelle, komplexe, triplexe, quadruplexe Grösse auftreten kann. Die Grundaxen bedingen die Deklinations-, Inklinations- und Reklinationsaxen, also die Drehungen, Wälzungen und Wendungen.

Werden die Grundaxen so genommen, dass eine gegebene Grösse als eine primäre oder reelle erscheint; so sind durch diese Bedingung zuweilen, aber nicht immer alle Grundaxen und Multiplikationsprozesse bestimmt. Ist die gegebene Grösse eine Linie; so bestimmt sich hierdurch nur die Grundaxe OX: hierdurch wird die primäre Wälzung, nicht aber die Drehung und die Wendung bestimmt; eine reelle Linie kann in unendlich vielen Ebenen gedreht und gegen unendlich viel Ebenen gewendet werden. Ist die gegebene Grösse eine Fläche; so bestimmt jene Bedingung die Grundebene XY und die tertiäre Axe OZ: hierdurch wird, wie bei den Linien, die primäre Wälzung, nicht aber die Drehung und Wendung bestimmt; eine Ebene kann um unendlich viel in ihr liegende Axen gedreht werden. Ist die gegebene Grösse ein Körper; so bestimmt die fragliche Bedingung den Grundraum XYZ, nicht aber die Grundaxe und keine der drei Hauptaxen OX, OY, OZ: hierdurch bleibt nicht bloss, wie bei den Linien und Flächen, die Drehung und Wendung, sondern auch die Wälzung unbestimmt; ein reeller Körper kann um unendlich viel verschiedene Axen gedreht, gewälzt und gewendet werden.

Bleiben wir jetzt bei der sekundären Multiplikation der Körper oder bei ihrer primären Deklination stehen. Wird ein Körper als Ort des Endpunktes eines Linienvektors aufgefasst, also durch einen variabelen Linienvektor (r) oder durch ein System von linearen Koordinaten x, y, z, u dargestellt; so entspricht seine Deklination der Reklination dieses Linienvektors.

Durch diesen Prozess wird der Vektor (r) entweder tiefer in den vierdimensionalen Raum getrieben, oder mehr aus demselben herausgezogen, der primäre und sekundäre Theil bleiben ungeändert, der tertiäre z verkürzt oder verlängert sich und der quartäre u verlängert oder verkürzt sich: da die Änderung der vierten Dimension nicht anschaulich ist; so erscheint die Deklination des Körpers in der Anschauung als eine Kompression oder Expansion in der Richtung der Axe OZ oder normal zur Ebene XY. Der Vektor OP des Punktes P, nämlich die Grösse

$$(r) = x + y\,i + z\,i\,i_1 + u\,i\,i_1\,i_2$$

geht durch irgend eine Reklination, wodurch sich die anschauliche Ordinate z in z_1 und u in u_1 verwandelt, weil $r_1 = r$ bleibt, mithin $z_1^2 + u_1^2 = z^2 + u^2$ ist, über in

$$(r_1) = x + y\,i + z_1\,i\,i_1 + \sqrt{z^2 + u^2 - z_1^2}\,.\,i\,i_1\,i_2$$

Wenn α, β, γ die Deklination, Inklination und Reklination des Vektors (r) in dem gegebenen Körper ist; so hat man für denselben auch

$$(r) = r\,cos\,\alpha + r\,sin\,\alpha\,cos\,\beta\,.\,i + r\,sin\,\alpha\,sin\,\beta\,cos\,\gamma\,.\,i\,i_1 + r\,sin\,\alpha\,sin\,\beta\,sin\,\gamma\,.\,i\,i_1\,i_2$$

Wird der Körper um den Winkel γ_1 deklinirt oder in der Richtung $O\,Z$ oder gegen die Ebene $X\,Y$ komprimirt, resp. expandirt, also jeder Vektor um den Winkel γ_1 reklinirt; so erhält man, indem $\gamma + \gamma_1$ für γ gesetzt wird, da $r\,cos\,\alpha = x$, $r\,sin\,\alpha\,cos\,\beta = y$, $r\,sin\,\alpha\,sin\,\beta\,cos\,\gamma = z$, $r\,sin\,\alpha\,sin\,\beta\,sin\,\gamma = u$ ist,

$$(r_1) = x + y\,i + (z\,cos\,\gamma_1 - u\,sin\,\gamma_1)\,i\,i_1 + (z\,sin\,\gamma_1 + u\,cos\,\gamma_1)\,i\,i_1\,i_2$$

Wenn man die Axe $O\,Z$, $O\,X$, $O\,Y$ zur primären, sekundären, tertiären annimmt, die Axe $O\,U$ aber als quartäre beibehält; so erscheint dieser Vektor als

$$(r_1) = (z\,cos\,\gamma_1 - u\,sin\,\gamma_1) + x\,i + y\,i\,i_1 + (z\,sin\,\gamma_1 + u\,cos\,\gamma_1)\,i\,i_1\,i_2$$

Eine Deklination des Körpers um den Winkel γ_2 oder eine Reklination aller Vektoren um diesen Winkel, wodurch der Körper in der Richtung $O\,Y$ oder gegen die Ebene $X\,Z$ komprimirt, resp. expandirt wird, ergiebt wie vorhin

$$(r_2) =$$
$$(z\,cos\,\gamma_1 - u\,sin\,\gamma_1) + x\,i + (y\,cos\,\gamma_2 - z\,sin\,\gamma_1\,sin\,\gamma_2 - u\,cos\,\gamma_1\,sin\,\gamma_2)\,i\,i_1 + (y\,sin\,\gamma_2 + z\,sin\,\gamma_1\,cos\,\gamma_2 + u\,cos\,\gamma_1\,cos\,\gamma_2)\,i\,i_1\,i_2$$

Wenn jetzt die Axe $O\,Y$, $O\,Z$, $O\,X$ zur primären, sekundären, tertiären angenommen und die quartäre Axe $O\,U$ beibehalten wird, erscheint dieser Vektor als

$$(r_2) = (y\,cos\,\gamma_2 - z\,sin\,\gamma_1\,sin\,\gamma_2 - u\,cos\,\gamma_1\,sin\,\gamma_2) + (z\,cos\,\gamma_1 - u\,sin\,\gamma_1)\,i + x\,i\,i_1 + (y\,sin\,\gamma_2 + z\,sin\,\gamma_1\,cos\,\gamma_2 + u\,cos\,\gamma_1\,cos\,\gamma_2)\,i\,i_1\,i_2$$

Eine Deklination des Körpers um den Winkel γ_3, wodurch derselbe in der Richtung $O\,X$ gegen die Ebene $Y\,Z$ komprimirt oder expandirt wird, liefert

$$(r_3) = (y\,cos\,\gamma_2 - z\,sin\,\gamma_1\,sin\,\gamma_2 - u\,cos\,\gamma_1\,sin\,\gamma_2) + (z\,cos\,\gamma_1 - u\,sin\,\gamma_1)\,i + (x\,cos\,\gamma_3 - y\,sin\,\gamma_2\,sin\,\gamma_3 - z\,sin\,\gamma_1\,cos\,\gamma_2\,sin\,\gamma_3 - u\,cos\,\gamma_1\,cos\,\gamma_2\,sin\,\gamma_3)\,i\,i_1 + (x\,sin\,\gamma_3 + y\,sin\,\gamma_2\,cos\,\gamma_3 + z\,sin\,\gamma_1\,cos\,\gamma_2\,cos\,\gamma_3 + u\,cos\,\gamma_1\,cos\,\gamma_2\,cos\,\gamma_3)\,i\,i_1\,i_2$$

Nimmt man jetzt wieder wie zu Anfang OX, OY, OZ zur primären, sekundären, tertiären Axe; so wird

$$\begin{aligned}(r_3) = {} & (x\ cos\ \gamma_3 - y\ sin\ \gamma_2\ sin\ \gamma_3 - z\ sin\ \gamma_1\ cos\ \gamma_2\ sin\ \gamma_3 \\ & - u\ cos\ \gamma_1\ cos\ \gamma_2\ sin\ \gamma_3) \\ & + (y\ cos\ \gamma_2 - z\ sin\ \gamma_1\ sin\ \gamma_2 - u\ cos\ \gamma_1\ sin\ \gamma_2)\ i \\ & + (z\ cos\ \gamma_1 - u\ sin\ \gamma_1)\ i\,i_1 \\ & + (x\ sin\ \gamma_3 + y\ sin\ \gamma_2\ cos\ \gamma_3 + z\ sin\ \gamma_1\ cos\ \gamma_2\ cos\ \gamma_3 \\ & + u\ cos\ \gamma_1\ cos\ \gamma_2\ cos\ \gamma_3)\ i\,i_1\,i_2\end{aligned}$$

Diese Formel stellt den dreifach, erst in der Richtung OZ, dann in der Richtung OY und zuletzt in der Richtung OX deklinirten (komprimirten oder expandirten) Körper von gleicher ursprünglicher Masse dar.

War der ursprüngliche Körper ein dreidimensionaler oder vollkommen anschaulicher, also $u = 0$; so wird der dreimal deklinirte

$$\begin{aligned}(r_3) = {} & (x\ cos\ \gamma_3 - y\ sin\ \gamma_2\ sin\ \gamma_3 - z\ sin\ \gamma_1\ cos\ \gamma_2\ sin\ \gamma_3) \\ & + (y\ cos\ \gamma_2 - z\ sin\ \gamma_1\ sin\ \gamma_2)\ i + z\ cos\ \gamma_1\ i\,i_1 \\ & + (x\ sin\ \gamma_3 + y\ sin\ \gamma_2\ cos\ \gamma_3 + z\ sin\ \gamma_1\ cos\ \gamma_2\ cos\ \gamma_3)\ i\,i_1\,i_2\end{aligned}$$

Dieser deklinirte Körper wird ebenfalls ein dreidimensionaler oder ganz anschaulicher sein, wenn die drei Deklinationen γ_1, γ_2, γ_3 so sind, dass unbedingt und allgemein

$$x\ sin\ \gamma_3 + y\ sin\ \gamma_2\ cos\ \gamma_3 + z\ sin\ \gamma_1\ cos\ \gamma_2\ cos\ \gamma_3 = 0$$

ist. Für einen Körper, worin x, y, z drei unabhängige Variabelen sind, wird diese Bedingung nur erfüllt, wenn γ_3 gleich 0 oder π, ferner γ_2 gleich 0 oder π, endlich γ_1 gleich 0 oder π ist. Hierdurch erhält man für den deklinirten Körper

$$(r_3) = \pm x \pm y\,i \pm z\,i\,i_1$$

Diese beachtenswerthe Formel lehrt, dass unter dem allgemeineren Gesichtspunkte symmetrische Körper, Flächen und Linienfiguren einander kongruent sind oder dass sie durch Reklination ineinander übergeführt werden können. So kann durch Reklination aus einem sphärischen Dreiecke ein symmetrisches erzeugt, die rechte Hand in die linke verwandelt werden. Man darf hierbei jedoch nicht übersehen, dass diese Reklination der Linien keine anschauliche Drehung, sondern ein nicht anschaulicher Verdichtungsprozess ist.

Wenn es sich um eine anschauliche Fläche handelt, ist z eine Funktion von x und y, also $z = f(x, y)$ und die Verwandlung in eine anschauliche Fläche erfordert für die Winkel γ_1, γ_2, γ_3 die Bedingung

$$x\ sin\ \gamma_3 + y\ sin\ \gamma_2\ cos\ \gamma_3 + f(x, y)\ sin\ \gamma_1\ cos\ \gamma_2\ cos\ \gamma_3 = 0$$

So ist z. B. für eine Kugelfläche $z = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$; es muss also

$$x \sin \gamma_3 + y \sin \gamma_2 \cos \gamma_3 + \sqrt{r^2 - x^2 - y^2} \cdot \sin \gamma_1 \cos \gamma_2 \cos \gamma_3 = 0$$

oder

$$\begin{aligned} x^2 (\sin^2 \gamma_3 + \sin^2 \gamma_1 \cos^2 \gamma_2 \cos^2 \gamma_3) + 2 x y \sin \gamma_3 \sin \gamma_2 \cos \gamma_3 \\ + y^2 (\sin^2 \gamma_2 \cos^2 \gamma_3 + \sin^2 \gamma_1 \cos^2 \gamma_2 \cos^2 \gamma_3) \\ - r^2 \sin^2 \gamma_1 \cos^2 \gamma_2 \cos^2 \gamma_3 = 0 \end{aligned}$$

sein. Diese Bedingung für die beiden unabhängigen $x y z$ führt ebenfalls zu der Forderung, dass $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ gleich 0 oder π seien. Die unverdichtete Kugelfläche lässt sich daher nur in eine gleiche unverdichtete Kugelfläche dekliniren.

Betrachtet man nun die Wirkung einer einfachen Deklination oder Kompression in der Richtung OZ, setzt man also $\gamma_2 = 0$, $\gamma_3 = 0$; so geht eine anschauliche Grösse in

$$(r_3) = x + y i + z \cos \gamma_1 \cdot i i_1 + z \sin \gamma_1 \cdot i i_1 i_2$$

über und diese Grösse ist nur dann eine anschauliche, wenn $\gamma_1 = 0$ oder π ist.

Die durch einfache Deklination erzeugte verdichtete Grösse erscheint immer verhüllt in der anschaulichen Grösse

$$(r_4) = x + y i + z \cos \gamma_1 \cdot i i_1$$

Diese anschauliche Grösse ist diejenige, deren Ordinaten z sämmtlich in demselben Verhältnisse $\cos \gamma_1$ reduzirt sind. Hiernach erscheint eine verdichtete Kugelfläche durch Verdichtung in der Richtung OZ immer als eine verdichtete Fläche, welche von der Oberfläche eines Rotationsellipsoides verhüllt wird.

§. 18.

Körperliche Form und Krümmung.

In der Gleichung eines Körpers

$$(r) = x + y i + z i i_1 + u i i_1 i_2$$

ist u eine Funktion der unabhängigen Variabelen x, y, z, und die Natur dieser Funktion bedingt die Form dieses Körpers. Eine konstante Funktion $u = f(x_1, y_1, z_1)$, d. h. der Fall, wo die drei Variabelen x, y, z nur konstante Werthe x_1, y_1, z_1 haben, entspricht der ersten Hauptform oder dem durch isolirte Eckpunkte bestimmten konstanten Körper; die Funktion ersten Grades $u = n + a x + b y + c z$ entspricht der zweiten körperlichen Hauptform oder dem einförmigen Körper; andere Funktionen liefern die dritte, vierte und fünfte Hauptform, sowie die dazwischen liegenden Haupt-Formklassen. Der einförmige Körper

ist unter den dreidimensionalen Grössen die Analogie der Ebene unter den zweidimensionalen Grössen und die Analogie der Geraden unter den eindimensionalen Grössen. Für $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$ wird die vierte Dimension u konstant $= n$ und, wenn $n = 0$ ist, gleich null, ohne die Variabelen x, y, z irgendwie zu beschränken. Hieraus folgt, dass der dreidimensionale Raum und jeder Theil davon, also jeder anschauliche Körper einförmig ist, dass also alle Variabilität der Form, alle Formverschiedenheit nur die mit einer vierten Dimension begabten, vierdimensionalen oder verdichteten Körper betrifft und nur in der Variation der Dichtigkeit, d. h. in der Abhängigkeit dieser Dichtigkeit u von den anschaulichen Koordinaten x, y, z beruht. Da ferner die Anschauung jedes verdichteten Körpers diejenige eines dreidimensionalen Körpers ist, welcher die Oberfläche $u = 0$ hat; so leuchtet ferner ein, dass die Anschauung der noch so komplizirten vierdimensionalen Körperformen doch immer nur der Anschauung des einförmigen Raumes entspricht.

Wie die analytische Geometrie die Gesetze der Flächenform auf die Richtung und Krümmung der Flächenelemente zurückführt und durch die Tangentialebene, die Normale, das Krümmungsmaass, die Indikatrix, die Krümmungskugelfläche u. s. w. vergegenwärtigt, so wollen wir jetzt die Gesetze der Körperform auf die Richtung und Form der Körperelemente zurückführen und durch den Tangentialkörper, die Normale, das körperliche Krümmungsmaass, die Indikatrix, die Krümmungskugel u. s. w. zur Erkenntniss bringen.

Für einen beliebigen Körper ist in der obigen Gleichung $u = f(x, y, z)$ eine beliebige Funktion von x, y, z, deren erste und zweite Differentialkoeffizienten wir folgendermaassen bezeichnen.

$$p_1 = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad p_2 = \frac{\partial u}{\partial y} \qquad p_3 = \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$q_1 = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad q_2 = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad q_3 = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$t_1 = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} \qquad t_2 = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} \qquad t_3 = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$$

Für die nächste Umgebung eines Punktes P dieses Körpers hat man die Gleichung

$$(r) + \partial (r) = x + yi + zii_1 + uii_1i_2 + \triangle x + \triangle y.i + \triangle z.ii_1 + \triangle u.ii_1i_2$$

und hierin ist, wenn man $\triangle u$ bis auf die Glieder erster und zweiter Ordnung entwickelt,

$$\triangle u = p_1 \partial x + p_2 \partial y + p_3 \partial z + q_1 \partial x^2 + q_2 \partial y^2 + q_3 \partial z^2 + 2 t_1 \partial y \partial z + 2 t_2 \partial x \partial z + 2 t_3 \partial x \partial y$$

Indem wir den Nullpunkt des Koordinatensystems in den Punkt P verlegen, was ohne Einfluss auf die Differentialkoeffizienten ist, stellen die unendlich kleinen Glieder dieser Gleichung den gegebenen Körper in der Nachbarschaft des Punktes P dar. Setzen wir also an die Stelle von ∂x, ∂y, ∂z, ∂u die Symbole x, y, z, v, indem wir unter x, y, z drei unabhängig variabele Koordinaten verstehen, welche jedoch nur in unendlich kleinen Längen genommen werden sollen, wird die Gleichung des Körpers in der Nachbarschaft von P

$$(r) = x + y\,i + z\,i\,i_1 + v\,i\,i_1\,i_2$$

und hierin ist

$$v = p_1\,x + p_2\,y + p_3\,z + q_1\,x^2 + q_2\,y^2 + q_3\,z^2 + 2\,t_1\,yz + 2\,t_2\,xz + 2\,t_3\,xy$$

Je kleiner x, y, z werden, desto mehr verschwinden die quadratischen Glieder vor den übrigen. Indem man dieselben vernachlässigt, erhält man die Gleichung des Tangentialkörpers, nämlich desjenigen einförmigen Körpers, welcher alle dem Punkte P benachbarten Punkte des gegebenen Körpers in sich aufnimmt. Für diesen Körper ist also

$$v = p_1\,x + p_2\,y + p_3\,z$$

Ganz auf dieselbe einfache Weise kann man die Tangentialebene einer Fläche bestimmen, indem man dafür $p_3 = 0$ und $z = p_1\,x + p_2\,y$ erhält. Übrigens habe ich im Anhange des zweiten Theiles meiner „Naturgesetze“ (S. 823) gezeigt, dass die Formel der Tangentialebene, welche nach den gewöhnlichen Methoden der analytischen Geometrie entwickelt wird und mit der vorstehenden übereinstimmt, keine allgemeine Gültigkeit hat, sondern nur für gewisse normal gebildete Formklassen richtig ist, welcher anzugehören, wir auch jetzt bei dem gegebenen Körper voraussetzen.

Indem wir in dem Ausdrucke von v für die Grössen x, y, z Werthe von beliebiger endlicher Länge zulassen, stellt derselbe den einförmigen Tangentialkörper in unbeschränkter Ausdehnung dar.

Die Normale dieses Tangentialkörpers ist eine Linie, welche wir auf S. 183 durch die Neigungswinkel $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ gegen die Axen OX, OY, OZ, OU in der Form

$$(r) = r\cos\alpha + r\cos\beta\,.\,i + r\cos\gamma\,.\,i\,i_1 + r\cos\delta\,.\,i\,i_1\,i_2$$

bestimmt haben. Diese Kosinus sind jetzt

$$\cos\alpha = \frac{p_1}{\sqrt{1 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}},\quad \cos\beta = \frac{p_2}{\sqrt{1 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}}$$

$$\cos\gamma = \frac{p_3}{\sqrt{1 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}},\quad \cos\delta = \frac{-1}{\sqrt{1 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}}$$

und wenn man in der Gleichung der Normalen das primäre Glied $r\cos\alpha$ mit x bezeichnet, wird diese Gleichung

$$(r) = x + \frac{\cos\beta}{\cos\alpha}\, x\,i + \frac{\cos\gamma}{\cos\alpha}\, x\,i\,i_1 + \frac{\cos\delta}{\cos\alpha}\, x\,i\,i_1\,i_2$$

$$= x + \frac{p_2}{p_1}\, x\,i + \frac{p_3}{p_1}\, x\,i\,i_1 - \frac{1}{p_1}\, x\,i\,i_1\,i_2$$

Die Länge des Vektors r dieser Normalen ist

$$r = \frac{x}{p_1}\sqrt{1 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2} = \frac{x}{\cos\alpha}$$

Verrückt man den Tangentialkörper in der Richtung dieser Normalen um die Entfernung $-r_1$, welcher die Koordinaten $-x_1, -y_1, -z_1$ angehören; so erhält man seine Gleichung, indem man in dem obigen Werthe von v für die Koordinaten x, y, z die Werthe $x' + x_1$, $y' + y_1$, $z' + z_1$ substituirt, schliesslich aber die Akzente der neuen Koordinaten x', y', z' unterdrückt. Demnach wird der neue Werth von v

$$v = p_1\,(x + x_1) + p_2\,(y + y_1) + p_3\,(z + z_1)$$
$$= (p_1 x_1 + p_2 y_1 + p_3 z_1) + p_1 x + p_2 y + p_3 z$$

Hierin haben x_1, y_1, z_1 die Werthe $r_1 \cos\alpha$, $r_1 \cos\beta$, $r_1 \cos\gamma$; es ist also

$$v = \frac{(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)\, r_1}{\sqrt{1 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}} + p_1 x + p_2 y + p_3 z$$
$$= \frac{(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)\, x_1}{p_1} + p_1 x + p_2 y + p_3 z$$
$$= n + p_1 x + p_2 y + p_3 z$$

worin wir zur Abkürzung

$$\frac{(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)\, r_1}{\sqrt{1 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}} = n$$

gesetzt haben.

Die Gleichsetzung dieses Werthes von v mit dem aus der Gleichung des gegebenen Körpers ergiebt für die Durchdringung dieses Körpers mit einem zum Tangentialkörper parallelen Körper die Gleichung

$$q_1 x^2 + q_2 y^2 + q_3 z^2 + 2\,t_1\,yz + 2\,t_2\,xz + 2\,t_3\,xy = n$$

Da in der Gleichung für den Körper die Variabelen x, y, z nur sehr kleine Werthe haben dürfen; so kann auch für die Verrückung r_1 und demnach für n nur ein sehr kleiner Werth genommen werden. Die letzte Gleichung charakterisirt eine Fläche und zwar entweder ein Ellipsoid, oder ein Hyperboloid mit einem Zweige, oder ein Hyperboloid mit zwei Zweigen, oder eine unmögliche Fläche. Der Mittelpunkt derselben liegt im Nullpunkte des Koordinatensystems, also im Punkte P, streng genommen aber, in dem um den sehr geringen Abstand r_1 davon entfernt in der Normalen liegenden Punkte. Zur Bestimmung der drei Halbaxen a, b, c dieser Fläche hat man die Richtung

der Koordinatenaxen OX, OY, OZ so zu ändern, dass die drei in yz, xz, xy multiplizirten Glieder verschwinden. Aus der analytischen Geometrie der drei Dimensionen ist durch Cauchy bekannt, dass wenn s', s'', s''' die drei Wurzeln der aus den Koeffizienten der vorstehenden Gleichung gebildeten kubischen Gleichung

$$s^3 - s^2(q_1 + q_2 + q_3) + s(q_1 q_2 + q_1 q_3 + q_2 q_3 - t_1^2 - t_2^2 - t_3^2) - (q_1 q_2 q_3 + 2 t_1 t_2 t_3 - q_1 t_1^2 - q_2 t_2^2 - q_3 t_3^2) = 0$$

sind, man für jene drei Halbaxen a, b, c

$$a^2 = \frac{n}{s'} \qquad b^2 = \frac{n}{s''} \qquad c^2 = \frac{n}{s'''}$$

also

$$a = \sqrt{\frac{n}{s'}} \qquad b = \sqrt{\frac{n}{s''}} \qquad c = \sqrt{\frac{n}{s'''}}$$

hat. Diese Fläche ist die Indikatrix des gegebenen Körpers. Sie bestimmt die Form oder Variabilität der Dichtigkeit eines Körpers rings um den Punkt P ganz ebenso wie die lineare elliptische oder hyperbolische Indikatrix die Krümmung einer Fläche bestimmt. Diese Variabilität der körperlichen Form ist die Analogie zur Krümmung der Flächen und Linien: wenn man jedoch unter Krümmung eine Eigenschaft der anschaulichen Form versteht; so ist dieser Name für Körper nicht recht passend, da deren Form nicht anschaulich ist.

Die beiden Axen der linearen Indikatrix bestimmen zwei Hauptschnitte einer Fläche, in welcher ihre Krümmung ein Maximum und ein Minimum ist. Ebenso bestimmen die drei Axen der flächenhaften Indikatrix drei Hauptkrümmungen eines Körpers in drei aufeinander rechtwinklig stehenden Ebenen, welche, wenn die Richtung der Normalen zur Axe PU und die Richtungen der drei Axen der Indikatrix zu den Axen PX, PY, PZ genommen werden, die Ebenen UX, UY, UZ sind. Bezeichnet man die drei Hauptkrümmungshalbmesser, welche den Krümmungen in diesen drei Ebenen angehören, mit R', R'', R'''; so ist, wenn r_1 den Abstand des Mittelpunktes der Indikatrix vom Tangentenpunkte P bezeichnet,

$$R' = \frac{a^2}{2 r_1} = \frac{n}{2 r_1 s'} = \frac{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}{2 s' \sqrt{1 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}}$$

$$R'' = \frac{b^2}{2 r_1} = \frac{n}{2 r_1 s''} = \frac{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}{2 s'' \sqrt{1 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}}$$

$$R''' = \frac{c^2}{2 r_1} = \frac{n}{2 r_1 s'''} = \frac{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}{2 s''' \sqrt{1 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}}$$

Jenachdem die betreffende Wurzel s und daher der zugehörige Krümmungshalbmesser R der vorstehenden kubischen Gleichung positiv

oder negativ ist, bezeichnet sie eine konkave oder konvexe Hauptkrümmung und es sind entweder alle drei oder zwei oder eine oder keine Hauptkrümmung konkav.

Zur Erläuterung der verschiedenen möglichen Krümmungen des Körpers führen wir Folgendes an. Eine positive Wurzel s der kubischen Gleichung bedingt einen positiven Krümmungshalbmesser R, also eine konkave Krümmung, ferner einen positiven Werth des Quadrates der korrespondirenden Axe a der Indikatrix und demnach eine reelle Axe. Eine negative Wurzel bedingt ein negatives R, also eine konvexe Krümmung, ein negatives Axenquadrat mithin eine imaginäre Axe der Indikatrix. Zwei reelle Axen entsprechen einem elliptischen Durchschnitte der Indikatrix in der Ebene dieser Axen, eine reelle und eine imaginäre Axe entsprechen einem hyperbolischen Durchschnitte, zwei imaginäre Axen entsprechen keinem möglichen Durchschnitte. Aus der Unmöglichkeit eines Durchschnittes darf aber nicht auf die Nichtexistenz einer Indikatrix oder auf die Nichtexistenz einer Körperkrümmung oder auf die Unmöglichkeit eines Körpers geschlossen werden. Die Negativität einer Wurzel s oder die Imaginarität einer Axe a zeigt nur an, dass der um die Entfernung r_1 vom Punkte P in der positiven Richtung der Normalen vorgeschobene Tangentialkörper in der Richtung jener Axe a den gegebenen Körper nicht trifft, dass also hier kein Indikatorpunkt zu finden ist, dass aber jetzt ein Tangentialkörper, welcher in entgegengesetzter Richtung $-r_1$ vom Punkte P vorgeschoben wird, den gegebenen Körper in der Richtung der Axe a trifft: denn wenn r_1 negativ wird, wird auch n negativ und dadurch a reell, dagegen aber R negativ, also die betreffende Krümmung konvex.

Hieraus geht hervor, dass folgende vier Fälle in Betracht kommen: Wenn alle drei Wurzeln positiv, also alle drei Axen reell sind, hat der Körper drei konkave Hauptkrümmungen. Wenn zwei Wurzeln positiv und eine negativ ist, hat er zwei konkave und eine konvexe Hauptkrümmung. Wenn eine Wurzel positiv und zwei negativ sind, hat er eine konkave und zwei konvexe Hauptkrümmungen. Wenn alle drei Wurzeln negativ sind, hat er drei konvexe Hauptkrümmungen. Die erste und die vierte, sowie die zweite und die dritte Form sind Gegensätze voneinander. Die erste wird durch eine konkav ellipsoidische Indikatrix, die vierte durch eine konvex ellipsoidische Indikatrix (welche nicht durch den positiv verschobenen, sondern durch den negativ verschobenen Tangentialkörper erzeugt wird), die zweite durch eine hyperboloidische Indikatrix mit einem Zweige, die dritte durch eine hyperboloidische Indikatrix mit zwei Zweigen (deren beide Zweige in dem von dem einzweigigen Hyperboloid leer gelassenen Asymptotenraume liegen) dargestellt. Ganz ähnliche, wiewohl einfachere Verhältnisse bestehen für die Krümmung der Flächen im dreidimensionalen Raume.

Ohne uns um die Werthe der einzelnen drei Wurzeln s', s'', s''' der obigen kubischen Gleichung zu bemühen, ziehen wir aus dieser Gleichung

folgende wichtigen Schlüsse. Der Koeffizient des zweiten Gliedes stellt die Summe der drei Wurzeln s', s'', s''', der Koeffizient des dritten Gliedes die Summe der Produkte aus je zwei Wurzeln, der Koeffizient des vierten Gliedes das Produkt aus allen drei Wurzeln dar. Demnach ist

$$s' + s'' + s''' = q_1 + q_2 + q_3$$
$$s' s'' + s' s''' + s'' s''' = q_1 q_2 + q_1 q_3 + q_2 q_3 - t_1^2 - t_2^2 - t_3^2$$
$$s' s'' s''' = q_1 q_2 q_3 + 2 t_1 t_2 t_3 - q_1 t_1^2 - q_2 t_2^2 - q_3 t_3^2$$

Hiernach hat man für die Hauptkrümmungshalbmesser R', R'', R''' die interessanten Formeln

$$\frac{1}{R'} + \frac{1}{R''} + \frac{1}{R'''} = \frac{2\sqrt{1 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}}{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}(q_1 + q_2 + q_3)$$

$$\frac{1}{R'R''} + \frac{1}{R'R'''} + \frac{1}{R''R'''}$$
$$= \frac{4(1 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)}{(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)^2}(q_1 q_2 + q_1 q_3 + q_2 q_3 - t_1^2 - t_2^2 - t_3^2)$$

$$\frac{1}{R'R''R'''} = \frac{8(1 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)^{\frac{3}{2}}}{(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)^3}(q_1 q_2 q_3 + 2 t_1 t_2 t_3 - q_1 t_1^2 - q_2 t_2^2 - q_3 t_3^2)$$

woraus sich leicht die Werthe von $R' + R'' + R'''$, sowie von $R'R'' + R'R''' + R''R'''$ und von $R'R''R'''$ herstellen lassen.

Ferner hat man für die Halbaxen a, b, c

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{2r_1}\left(\frac{1}{R'} + \frac{1}{R''} + \frac{1}{R'''}\right)$$

$$\frac{1}{a^2 b^2} + \frac{1}{a^2 c^2} + \frac{1}{b^2 c^2} = \frac{1}{4r_1^2}\left(\frac{1}{R'R''} + \frac{1}{R'R'''} + \frac{1}{R''R'''}\right)$$

$$\frac{1}{a^2 b^2 c^2} = \frac{1}{8r_1^3} \cdot \frac{1}{R'R''R'''}$$

Hiernach ist auch

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2r_1(R' + R'' + R''')$$
$$a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2 = 4r_1^2(R'R'' + R'R''' + R''R''')$$
$$a^2 b^2 c^2 = 8r_1^3 R'R''R'''$$

Wie der Quotient $\frac{1}{R'}$ für Linien und der Quotient $\frac{1}{R'R''}$ für Flächen, so kann der Quotient $\frac{1}{R'R''R'''}$ für Körper als das Krümmungsmaass angesehen werden, wiewohl es sich hier um eine nicht anschauliche Krümmung oder um eine Dichtigkeitsvariation handelt. Da abc dem Kubikinhalte der Indikatrix proportional ist; so ist das Krümmungs-

maass der Körper wie das der Flächen dem Quadrate des Inhaltes der Indikatrix proportional.

Wenn der gegebene Körper nicht verdichtet ist oder die vierte Dimension $u = 0$ hat; so werden alle Differentialkoeffizienten gleich null und die kubische Gleichung, aus welcher die Werthe von s', s'', s''' stammen, wird $s^3 = 0$. Die drei Wurzeln dieser Gleichung sind gleich null, demnach aber die drei Axen a, b, c der Indikatrix und die drei Haupt-Krümmungshalbmesser R', R'', R''' unendlich lang, das Krümmungsmaass mithin gleich null. Hieraus geht hervor, dass der anschauliche Raum absolut keine Krümmung hat, und dass derselbe auch dadurch keine Krümmung erhält, dass die darin existirenden vierdimensionalen Grössen eine Dichtigkeitsvariabilität besitzen, welche immer nur in einem anschaulichen krümmungslosen Körper verhüllt liegt.

§. 19.

Die Transformation der Körper.

Im Vorstehenden ist gezeigt, dass das Krümmungsmaass des dreidimensionalen, anschaulichen, geometrischen Raumes null ist, dass derselbe keine Krümmung hat, dass derselbe vielmehr vollkommen einförmig ist wie im zweidimensionalen Gebiete die Ebene und im eindimensionalen Gebiete die Gerade. Ein vierdimensionaler Körper, dessen vierte Dimension keine Anschaulichkeit besitzt, sondern sich in seinen räumlichen Punkten als Dichtigkeit verhüllt, hat eine Dichtigkeitsvariabilität, welche durch einen Ausdruck gemessen wird, der dem kubischen Inhalte eines aus den Axen der ellipsoidischen oder hyperboloidischen Indikatrix gebildeten Parallelepipedums proportional ist und sein Krümmungsmaass genannt werden kann. Ein solcher verdichteter Körper hat endliche Krümmung, d. h. endliche Dichtigkeitsform, jedoch niemals anschauliche oder eigentliche Krümmung, die nur dem anschaulichen Körper zukömmt und stets null ist.

Eine Linie und eine Fläche lässt sich ohne Dehnung und Kompression biegen oder transformiren: alle ihre Linienelemente behalten dabei ihre Länge; eine Fläche (nicht eine Linie) behält ausserdem bei der Transformation ihr Krümmungsmaass. Etwas Analoges gilt für den Körper: körperliche Krümmung, Biegung, Transformation hat aber keine Anschaulichkeit und kann nicht auf anschauliche Prozesse zurückgeführt werden. Durch körperliche Drehung wird ein Linienelement des gedrehten Körpers reklinirt, nämlich in den vierdimensionalen Raum getrieben, wobei sich sein anschaulicher Theil verkürzt, während sich ein in der Richtung der vierten Dimension liegender Theil, eine Dichtigkeit,

entwickelt. Hierbei bleibt die Quantität oder Masse des reklinirten Linienelementes

$$\partial s = \sqrt{\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2 + \partial u^2}$$

vollkommen ungeändert, obwohl es sich anschaulich verkürzt. Transformation eines Körpers ohne Quantitäts- oder Massenänderung seiner linearen Elemente ist also ein Verdichtungs-, resp. Expansionsprozess.

Eine Analyse ähnlich der, welche ich im Anhange zum zweiten Theile meiner „Naturgesetze“ ausgeführt habe, führt möglicherweise zu dem Resultate, dass das aus den ersten und zweiten Differentialkoeffizienten der Gleichung des Körpers zusammengesetzte Krümmungsmaass bei der Transformation des Körpers konstant bleibt, dass also die Körper denselben Transformationsgesetzen unterliegen wie die Flächen. Für die Leser, welche meine Naturgesetze nicht kennen, erlaube ich mir zu bemerken, dass ich an der angezeigten Stelle den ersten und bis jetzt vielleicht alleinigen Beweis des Satzes von der Konstanz des Krümmungsmaasses gegeben habe, indem Gauss, welcher diesen Satz in den „*Disquisitiones generales circa superficies curvas*“ aufgestellt hat, bei der Deduktion in einen Irrthum verfallen ist und den Beweis verfehlt hat, auch dass die Darlegung dieses Satzes in der „Theoretischen Physik“ von Thomson und Tait in §. 138 und 150 keinen Anspruch auf einen Beweis machen kann.

In dem gedachten Anhange habe ich ferner gezeigt, dass der fragliche Satz keine allgemeine Gültigkeit hat, dass derselbe vielmehr nur für stetig gekrümmte Flächen gilt und dass er auch nur für Flächen mit zwei endlichen Haupt-Krümmungshalbmessern absolut, für abwicklungsfähige Flächen mit einem oder zwei unendlichen Krümmungshalbmessern jedoch nur relativ richtig ist.

Endlich habe ich dargethan, dass unendlich viel Flächen, namentlich alle ringsum geschlossenen Flächen, z. B. eine volle Kugel- oder Ellipsoidenfläche, überall nicht, auch nicht im mindesten Grade transformabel sind, und dass der Grad der Transformabilität jedes transformabelen Flächenstückes von seiner Grösse und Begrenzung abhängt.

Etwas Ähnliches wird sich auch für die Körper herausstellen: nicht jeder Körper wird sich ohne Veränderung der Quantität seiner Linienelemente transformiren lassen. Übrigens ist alle körperliche Transformation, wie schon erwähnt, eine Verdichtung, durchaus keine anschauliche Krümmung.

§. 20.

Irrige Ansichten über den vierdimensionalen Raum.

Aus den vorstehenden Ermittlungen ergiebt sich, dass die in heutiger Zeit aufgetauchten Meinungen über die Zauberkraft des vierdimensionalen Raumes, insbesondere über die mit Hülfe dieser Kraft zu bewirkende Knotenschlingung in einen geschlossenen Faden, über die Transformation des rechten Handschuhes in einen linken und, allgemein, über die Deckung symmetrischer Figuren durch Drehungsprozesse spiritistische Visionen sind. Ebenso leuchtet ein, dass es ein vergebliches Bemühen ist, auf vierdimensionalen Flügeln in das Innere eines geschlossenen Körpers zu gelangen, ohne dessen Oberfläche zu durchbrechen. Da sich die vierte Dimension in jedem anschaulichen Punkte eines Körpers verhüllt, so vollzieht sich jede Bewegung längs dieser Dimension, welche von einem solchen Punkte aus oder zu ihm hin geht, in diesem Punkte selbst; um also in einen solchen Punkt durch einen vierten Dimensitätsprozess zu gelangen, muss man sich bereits in seinem anschaulichen oder geometrischen Orte befinden, und kein frommer Wunsch trägt uns aus diesem Punkte mittelst eines derartigen Prozesses hinaus.

Die Gesetze des drei- und vierdimensionalen Raumes sind vollkommen klar und verständlich; sie schliessen sich denen des zwei- und eindimensionalen Raumes logisch an und erweitern sich ebenso logisch für alle polydimensionalen Grössengebiete, wenn man bei ihrer Entwicklung auf dem Boden strenger Gesetzmässigkeit bleibt. Leider sind die Verirrungen heute sehr zahlreich, und die Arbeit von Riemann „Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen“ (Gesammelte Werke, Abhandlung XIII.) deren Kritik ich weiter oben in No. 2, S. 25 ff. angefangen habe und hier beendigen werde, ist für Viele die Legitimation zur Ersetzung ungenügender Erkenntnisse durch willkürliche Deutungen geworden. Aus dem Vorstehenden erhellt, dass die Resultate über die Krümmung des Raumes, welche Riemann durch höchst oberflächliche und ganz unmathematische Raisonnements herstellt, durchaus falsch sind, indem das Krümmungsmaass des Raumes nicht etwa konstant und endlich, auch nicht sehr klein, sondern absolut null ist, dass also eine kürzeste Linie im Raume, und wenn sie vom einen Ende der Welt nach dem anderen gezogen würde, immer eine absolut gerade ist und nicht die geringste Krümmung zeigen kann, auch dass die Winkelsumme jedes nochso grossen Dreieckes im Weltenraume unbe-

dingt gleich zwei rechten sein und nicht den geringsten sphärischen Exzess verrathen wird.

Der Raum und alles Räumliche als Anschauungsobjekt hat keine vierte Dimension, keine Dichtigkeit, keine andere Form als die Einförmigkeit, kein anderes als das Krümmungsmaass null: die vierte Dimension und die Gesetze der vierdimensionalen Grössen existiren nicht im Raume, nicht in der Anschauung, sondern im Verstande oder im Abstraktionsgebiete.

Die Behauptungen zwischen den Beziehungen des Krümmungsmaasses und der Ausdehnung des absoluten Raumes (S. 266 ff.), insbesondere die Meinung, dass der Raum eine endliche Ausdehnung haben würde, wenn sein Krümmungsmaass endlich wäre, widerspricht den Formgesetzen. Aus unseren Formeln geht hervor, dass das Krümmungsmaass eines Körpers von seiner Ausdehnung völlig unabhängig ist.

Der Satz auf S. 264, dass „der Charakter der Mannichfaltigkeiten, deren Krümmungsmaass konstant ist, darin beruhe, dass sich die Figuren in ihnen ohne Dehnung bewegen lassen", ist eine irrthümliche Auffassung. Die Bewegung, welche Riemann hierbei im Auge hat, ist anschauliche Bewegung: dieselbe hat für die Biegung oder Veränderung der körperlichen Form gar keine Bedeutung, wohl aber die Verdichtung, nämlich die reelle Längenänderung unter gleichzeitigem Eindringen in den vierdimensionalen Raum (resp. Herausdringen aus demselben), womit sich dann wieder der Riemannsche Begriff der Undehnsamkeit nicht verträgt. Wenn man die Bewegung ohne Dehnung in der für Körper richtigen Bedeutung auffasst, mögen sich allerdings Körper ohne Veränderung des Krümmungsmaasses transformiren lassen: allein, alsdann ergeben sich nicht die Riemannschen Rasultate, insbesondere nicht der ohne alle Ableitung, ganz willkürlich niedergeschriebene Ausdruck

$$\frac{1}{1+\frac{\alpha}{4}\Sigma x^2}\ \sqrt{\Sigma \partial x^2}$$

für das Linienelement. Das Linienelement des Körpers hat keinen anderen, als den Werth $\sqrt{\partial x^2+\partial y^2+\partial z^2+\partial u^2}$.

Alle diese Unrichtigkeiten entspringen aus der Willkür der Definitionen und aus der Meinung, dass man mathematische Entwicklungen auf beliebige formale Definitionen gründen könne. Ich habe es nicht für möglich gehalten, dass ein Mathematiker die Ansicht aussprechen könne, dass der Raum und die Geometrie auf Hypothesen beruhe, dass sich die Existenz des Raumes auf Erfahrung gründe, dass die Raumanschauungen daher nicht unbedingt gewiss, sondern nur wahrscheinlich seien, dass man also diesen Anschauungen beliebige hypothetische Grundlagen geben könne, dass aus der Unbegrenztheit des Raumes nicht die Unendlichkeit desselben folge, dass die Ausdehnungsverhältnisse mit den

Maassverhältnissen nicht in zwingenden Beziehungen stehen, dass die Fragen nach dem Unmessbargrossen für die Naturerklärung müssig, die Fragen nach dem Unmessbarkleinen aber wichtig seien, dass der Raum in seinen unendlich kleinen Elementen eine ganz andere, von den heutigen Menschen nicht geahnte Beschaffenheit haben könne, als in seinen endlichen Theilen, dass daher, wenn auch die astronomischen Beobachtungen keine Krümmung der langen Linien nachweisen, doch möglicherweise in den Elementen eine namhafte Krümmung stattfinden könne.

Solche und andere Ungereimtheiten kann man in der gedachten Abhandlung von Riemann, sowie in dessen Abhandlungen über Psychologie und Metaphysik, über Erkenntnisstheorie und über Naturphilosophie lesen. Ich halte mich wegen der Gemeinschädlichkeit solcher Irrlehren für verpflichtet, die Stimme gegen diese unrationelle Behandlung der Mathematik zu erheben. Sie ist nach der Willkürlichkeit der Hypothesen nichts Anderes, als die Wiedererweckung der abgethanen Naturphilosophie und zwar zum Zwecke der Begründung der reinen Mathematik. Dass denkende Mathematiker und so auch Riemann das Bedürfniss fühlen, das der Mathematik fehlende logische und philosophische Fundament aufzurichten, ist begreiflich: allein, das hierzu in Anwendung gebrachte Mittel der Aufstellung beliebiger Definitionen von fingirten Dingen, Eigenschaften und Operationen und die Darstellung der Resultate aus solchen willkürlichen Prämissen ist ebenso unfruchtbar und misslich, wie der Versuch, sich behuf Erforschung einer unbekannten Gegend die Augen zu verbinden, weil sie bisher nicht Alles gesehen haben und möglicherweise Täuschungen hervorbringen könnten, zum Ersatz der Augen aber sich einem selbstgeschaffenen Tastmechanismus und einer selbstgemachten Reisebeschreibung anzuvertrauen.

Die Welt und was zu ihr gehört, der Geist, beruht nicht auf willkürlichen, nach subjektivem Ermessen zu modelnden Grundlagen; formale Definitionen, fingirte Objekte, willkürliche Operationen haben keine Bedeutung, sind wesenlose Traumgestalten. Die Welt beruht nicht auf Hypothesen, Meinungen und Ansichten, sondern auf unbedingt sicheren, unwandelbaren, einzigen Grundlagen, welche keiner subjektiven Auslegung fähig sind. Diese Grundlagen sind die Grundeigenschaften, die Grundprozesse, die Grundoperationen, die Grundgesetze, die Grundforderungen, die Grundsätze, die Grundprinzipien. Die Eigenschaften und Gesetze sind in jedem Grössengebiete, in jedem Erscheinungs-, jedem Anschauungs-, jedem Erkenntnissgebiete prinzipiell dieselben; sie ordnen sich in jedem Gebiete nach einem pentarchischen Systeme. Wer in der Erkenntniss der allgemeinen Weltgesetze vordringen will, darf nicht darauf ausgehen, Grundeigenschaften und Grundoperationen zu erfinden, sondern die in der Welt gegebenen zu entdecken; diese Entdeckung aber ist für Jeden unmöglich, der die Existenz eines festen Systems von Grundlagen nicht mit Überzeugung für wahr hält,

der also glaubt, die Zahl und Art der Grundeigenschaften und Grundoperationen nach Belieben vermehren und verändern zu können, oder der meint, diese Grundlagen seien Hypothesen, also ungewiss und unnöthig.

Wer der letzteren Ansicht ist, möge die Zahl der geistverwirrenden Schriften und der spiritistischen Wahngebilde vermehren helfen. Wem aber die grosse Zahl der in der vorliegenden Schrift mit so wenigen Mitteln aufgedeckten Irrthümer betroffen macht und zu dem Gedanken an die Möglichkeit führt, dass die heutigen Grundlagen der Wissenschaft unzulänglich seien, Der befindet sich in der Stimmung, die „Naturgesetze“, welche sich mit der Aufsuchung der Grundlagen der Wissenschaften beschäftigen, vorurtheilsfrei zu würdigen: ich lade ihn ein, das Buch zu studiren, da ich glaube, dass die Mängel desselben von dem gesunden Kerne überwogen werden und dass dieser dem nach einem festen Halt in dem Gedränge von Hypothesen, Zweifeln und Unsicherheiten Suchenden einen Stützpunkt gewähren wird.

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY

QA
246
S3

Scheffler, Hermann
Die polydimensionalen Crössen und die vollkommenen Primzahlen

P&ASxi